

Elm və texnikanın müxtəlif sahələrinə aid bəzi riyazi məsələlərin dəqiq həllini klassik üsullarla tapmaq mümkün olmur. Bir çox hallarda isə alınmış dəqiq həll elə mürəkkəb ifadə şəkilində olur ki, praktikada ondan istifadə etdikdə yeni çətinliklər meydana çıxır. Bu halda öyrənilən obyektlərin riyazi modelinin qurulması və tədqiqi, ədədi nəticələrin alınması (çətin olmasına baxmayaraq) praktik əhəmiyyət kəsb edir. Müasir elm və texnikanın nailiyyətlərinin daha geniş tətbiq olunduğu, nəticələrin praktik əhəmiyyət daşıdığı bir vaxtda bu tip məsələlərin həllində kompüterdən istifadə etməklə yanaşı, yeni hesablama üsullarının işlənməsi, mövcud üsulların daha da təkmilləşdirilməsi zərurəti meydana çıxarır. Bu zaman işlənəcək yeni üsullar, eləcə də mövcud üsulların təkmilləşdirilməsi, hesablar aparılacaq hesablama texnikası vasitələrinin imkanlarına uyğun olmalıdır. Son on illiklər hesablama texnikası vasitələrinin sıçrayış xarakterli inkişafı, sırf riyazi xarakterli məsələlərin həlli üçün kompüter riyaziyyatı sistemlərinin (Mathcad, Matlab, Mathematica) meydana gəlməsi yeni üsulların işlənməsi ilə yanaşı, mövcud üsulların müqayisəsi, indiyə qədər istifadəsi çətin olan üsulların tətbiqləri üçün geniş imkanlar yaratmışdır.

Mövcud hesablama texnikası vasitələrinin imkanlarına uyğun, riyaziyyatın klassik üsulları ilə dəqiq tədqiq oluna bilməyən məsələlərin ədədi həlli üçün effektiv üsulların işlənməsi *hesablama riyaziyyatının* əsas məsələsidir. Hesablama riyaziyyatında müxtəlif tipli məsələlərin həllinə baxılır. Əksər məsələləri aşağıdakı kimi təsvir etmək olar.

$$y = A(x) \quad (1)$$

Burada x və y verilən R_1 və R_2 fəzalarının elementləri, A isə verilmiş operatorudur. Bəzi hallarda verilən x -ə görə y -in və ya verilən y -ə görə x -in tapılması məsələsinə baxılır. Əksər hallarda bu tip məsələlərin həlli dəqiq analitik üsullarla yerinə yetirilə bilmir. Bu halda hesablama riyaziyyatının üsullarından istifadə olunur. Hesablama riyaziyyatının əsas üsulu R_1, R_2 fəzalarından və $A(x)$ operatorundan birinin və ya bir neçəsinin hesabının əlverişli olması üçün \bar{R}_1 və \bar{R}_2 fəzaları və ya $\bar{A}(x)$ operatoru ilə əvəz olunması ilə yerinə yetirilir. Bu əvəzetmə elə aparılır ki,

$$\bar{y} = \bar{A}(\bar{x}) \quad (2)$$

tənliyinin $\bar{x} \in \bar{R}_1$ $\bar{y} \in \bar{R}_2$ həlli (1) tənliyinin dəqiq həllinə yaxın olmaqla \bar{x} və \bar{y} -in tapılması çətin olmasın. Misallarla izah edək.

1. Tutaq ki,

$$y = \int_a^b f(x)dx \quad (3)$$

müəyyən inteqralını hesablamalıdır. Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası kəsilməzdir və onun ibtidai funksiyası elementar funksiyalar şəkilində göstərilə bilmir. Bu inteqralın təqribi qiymətini hesablamalı üçün aşağıdakı üsullara baxaq.

1.1. Məlumdur ki, tələb olunan dəqiqliklə $[a, b]$ parçasında kəsilməz olan $f(x)$ funksiyasına $p(x)$ cəbri çoxhədlisi ilə yaxınlaşmaq olar. Bu halda (3) inteqralı əvəzinə

$$y = \int_a^b p(x)dx$$

inteqralını hesablamalı lazım gəlir ki, bunu da hesablamalı çətin deyil. Bu məsələnin həllində

$$A(f) \equiv \int_a^b f(x)dx$$

funksionalını dəyişmədik. Yalnız $A(f)$ operatorunun təyin oblastı kimi $f(x) \in C$ fəzası əvəzinə çoxhədlilər fəzasını götürdük.

1.2. Müəyyən inteqralın tərifindən bilirik ki, həmişə inteqralın qiymətinə kifayət qədər yaxın olan inteqral cəmi qurmaq mümkündür.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i)\Delta x_i.$$

Deməli inteqralı hesablamalı əvəzinə başqa bir məsələ, cəmin hesablanması məsələsinə baxmalı lazım gəlir. Yəni bu halda dəyişən operatorun özüdür.

$$A(f) \equiv \int_a^b f(x)dx \quad \bar{A}(f) \equiv \sum_{i=0}^n f(x_i)\Delta x_i$$

2. Tutaq ki, x və y həqiqi ədədlər çoxluğunun alt çoxluqlarına daxildir, yəni $A(x)$ funksiyadır və cədvəl şəklində verilmişdir. (1) tənliyində x -in elə qiymətləri axtarılır ki, $y = 0$ olsun. Başqa sözlə cədvəl şəklində verilmiş $A(x)$ funksiyasının sıfırları axtarılır. Əgər cədvəl şəklində verilmiş $A(x)$ funksiyasının yerinə Laqranjin və ya Nyutonun interpolasiya çoxhədlilərindən istifadə etsək ($y = L_n(x)$, $y = P_n(x)$), (1) tənliyin sıfırlarının tapılması məsələsi

$$L_n(x) = 0 \quad P_n(x) = 0$$

çoxhədlilərinin sıfırlarının tapılma məsələsinə gətirilər. Məsələyə başqa cür yanaşaq. Cədvəl şəklində verilmiş funksiyanın təyin oblastı ilə qiymətlər oblastının yerini dəyişək və

interpolyasiya çoxhədlilərini yazaq.

$$x = L_n(y) \quad x = P_n(y) \quad (4)$$

Bu halda cədvəl şəkilində verilmiş funksiyanın sıfırının tapılması, yəni (1) tənliyinin kökünün tapılması məsələsi (4) funksiyalarının $y = 0$ nöqtəsində qiymətlərinin hesablanması məsələsinə gətirilir:

$$x = L_n(0) \quad x = P_n(0)$$

3. Tutaq ki, aşağıdakı inteqral tənlik verilmişdir.

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \quad (5)$$

Burada $K(x,s)$ nüvəsi və $f(x)$ sərbəst həddi kəsilməz funksiyalardır.

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds \equiv A(\varphi(x)) \quad (6)$$

işarələməsini aparsaq (5) tənliyini aşağıdakı kimi yazı bilərik $A(\varphi(x)) = f(x)$. Bu inteqral tənliyin həlli üçün Çebışevin kvadratura düsturlarından istifadə edilərək (5) inteqral tənliyin həlli $\bar{\varphi}(x_i)$ ($i = 1,2,3,\dots,n$) dəyişənlərinə nəzərən aşağıdakı xətti tənliklər sistemə gətirilər.

$$\bar{\varphi}(x_i) - \lambda \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n K(x_i, x_k) \bar{\varphi}(x_k) = f(x_i) \quad (i = 1,2,3,\dots,n)$$

Bu halda (6) inteqral operatoru adi xətti tənliklər sistemini xarakterizə edən matris operatoru ilə əvəz olunur. Tapılmış $\bar{\varphi}(x_i)$ ($i = 1,2,3,\dots,n$) qiymətlərinə görə interpolyasiya çoxhədlilərindən istifadə edərək, (5) inteqral tənliyinin $\varphi(x)$ dəqiq həllinə kifayət qədər yaxın olan təqribi həllini qura bilərik. Əvvəlki misallarda da funksiya başqa funksiya ilə yaxınlaşmadan istifadə etdik. Bu yaxınlaşma funksiyaların yerləşdiyi fəzada qəbul olunmuş metrika ilə müəyyən olunur. Bütün deyilənləri ümumiləşdirərək, hesablama riyaziyyatında həll olunan məsələləri daha aydın, tam xarakterizə etmək üçün ədədi nəticələr alınana qədər hər hansı məsələnin həlli prosesini mərhələlərə bölək. 1-ci mərhələ. Qoyulan riyazi məsələnin həlli üçün mövcud ədədi üsulların müqayisəli təhlili, seçilən üsul ilə tapılan təqribi həllin dəqiq həllə daha yaxın olması (xətanın az olması), üsulun tətbiq sahəsinin genişliyi və fərdi kompüterdə bu üsuldən istifadənin effektivliyi. Daha ümumi şəkildə funksional fəzada çoxluğa və funksiya yaxınlaşma məsələləri birinci mərhələyə aid edilir. Müxtəlif ədəbiyyatlarda bu məsələlər hesablama üsulları və ya ədədi üsullar adı altında verilir. 2-ci mərhələyə isə hesablama sxeminin tərtibi və ya məsələnin həlli üçün proqram tərtibi aid edilir. Burada proqram tərtibi dedikdə ənənəvi proqramlaşdırma ilə yanaşı

kompiuter riyaziyyatı sistemlərində hazırlanmış standart funksiya və obyektlərdən istifadə edərək hesabat bloklarının tərtibi başa düşülür. Bu hesabat bloklarında hazır obyektlərdən istifadə etməklə istifadəçi özü üçün interfeys yaradır. Bu tip məsələlərin həlli üçün yeni kompiuter riyaziyyatı sistemləri işlənmişdir və bunlar içərisində Mathcad mühiti geniş imkanlara malikdir. Riyaziyyatçı ağ kağızda məsələnin həllini ardıcılıqla necə yazırsa, klaviaturadakı simvollar və xüsusi riyazi simvollar cədvəlindən istifadə edərək məsələ həllinin alqoritmini kompiuterin ekranında yazır (ekran sanki ağ kağızı xatırladır). Ekranı yazılmış alqoritmə əsasən proqramı isə Mathcad sisteminin özü tərtib edir. Mathcad sisteminin o birilərinə nəzərən əsas fərqi bu sistemdə WYSIWYG prinsirininə tam riayət olunmasıdır. Ona görə də bu sistemdən istifadə sadədir. Riyazi məsələlərin həllində əksər hallarda funksiya əvvəlcədən verilir. Funksiyanın riyaziyyatda qəbul edildiyi işarələmələrlə verilməsi Mathcad sistemində daha sadədir (Matlab mühitində isə funksiyanı təsvir etmək üçün xüsusi fayl (M-fayl) yaradılmalıdır). Funksiya verildikdən sonra funksiyanın limitini, inteqralını, adi və xüsusi törəmələrini, araşdırılmasını, qrafikinə qurulmasını və sair məsələləri çox asanlıqla yerinə yetirmək mümkündür. Kompiuter riyaziyyatı sistemlərinin hər birinin proqramlaşdırma dilləri də var ki, bu dillərdə hesabatlar aparmaq üçün proqramlar tərtib oluna bilər.

Hesablama üsulları və onların tətbiq sahələrinə aid çoxlu ədəbiyyatlar vardır. Ancaq müasir kompiuter riyaziyyatı sistemlərində ədədi üsullardan istifadə etmək və müxtəlif məsələlərin həllinə tətbiq etmək üçün hesabat bloklarının hazırlanmasına aid demək olar ki, ədəbiyyat yoxdur. Təqdim olunan vəsait on fəsildən ibarətdir. Birinci fəsildə kompiuter riyaziyyatı sistemlərinin ümumi strukturu, tətbiq sahələri, müqayisəsi, Mathcad mühitinin üstünlükləri və riyazi məsələlərin həll qaydaları təhlil edilir. Sonrakı fəsillərdə isə ardıcıl olaraq xətalər, birdəyişənli qeyri-xətti tənliklər, tənliklər sistemi, interpolyasiya məsələsi, ədədi inteqrallama və diferensiaslama, adi və xüsusi törəməli diferensial tənliklər, inteqral tənliklər habelə optimallaşdırmanın ədədi üsulları verilmişdir. Hər bir fəsildə əsas üsullar və həll alqoritmiləri, Mathcad mühitində tərtib olunmuş hesabat blokları və onların nəticələri, başqa alqoritmik dillərdə proqram tərtibi üçün blok sxemlər daxil edilmişdir.

Təqribi ədədlər. Xəta anlayışı

Praktik məsələlərin həllində bəzi hallarda kəmiyyətin dəqiq qiyməti ilə yanaşı onun təqribi qiymətindən də istifadə olunur. Tutaq ki, hər hansı kəmiyyətin dəqiq qiyməti A , kəmiyyətin A dəqiq qiymətə uyğun təqribi qiyməti isə a ilə işarə olunmuşdur. Kəmiyyətin təqribi qiyməti onun dəqiq qiymətindən az fərqlənir və hesablama proseslərində ondan istifadə olunur. Bundan sonra dəqiq və təqribi ədəd uyğun olaraq A və a ilə işarə edəcəyik.

Hesablama prosesini sadələşdirmək məqsədi ilə dəqiq qiymətin təqribi qiymətlə əvəz olunmasından, real proseslə onu təsvir edən riyazi model arasında fərqlərdən, məsələnin həlli prosesində istifadə olunan metodun təqribiliyindən, ədədlər üzərində aparılan yuvarlaqlaşdırmadan müəyyən xətalər əmələ gəlir.

Bu göstərilən xətalərin hər biri böyük olmasa da (bunlardan bəzilərini aradan qaldırmaq mümkündür) müəyyən əməliyyatlar aparıldıqdan sonra bu xətalər cəmlənib xətanın böyüməsinə səbəb ola bilər. Ona görə də məsələnin həllində xətanın az olmasına çalışmaqla bərabər bu xətalər qiymətləndirilməlidir. Hesablama riyaziyyatında xətalərin qiymətləndirilməsində mütləq və nisbi xəta anlayışlarından istifadə olunur.

Mütləq və nisbi xəta

Ədədin dəqiq qiyməti ilə təqribi qiymətinin fərqi təqribi ədədin xətası deyilir. Bu fərq müsbət yaxud mənfi ola bilər. Fərqi mütləq qiymətinə təqribi ədədin mütləq xətası deyilir və aşağıdakı kimi işarə olunur.

$$\Delta a = |A - a|$$

A dəqiq ədədi məlum olduqda deyilən qayda ilə mütləq xətanı hesablamaq mümkündür. Əgər A məlum deyilsə, mütləq xəta hesablanmır və mütləq xətanın hüdud qiyməti (bəzi ədəbiyyatlarda limit mütləq xəta, hüdud mütləq xəta və ya mütləq xətanın limit qiyməti $\Delta^* a$) anlayışından istifadə olunur.

Bu halda hesablama prosesinin hansı dəqiqliklə aparıldığı barədə (məsələn hesabat 0.01 dəqiqliklə aparılıb, ədəd yuvarlaqlaşdırılaraq 24.45 qiyməti alınmışdır) məlumat verilir. Bu məlumat mütləq xətanın hüdud qiymətini xarakterizə edir və mütləq xəta bu qiymətdən böyük ola bilməz.

$$\Delta a = |A - a| \leq \Delta^* a$$

Bu münasibətdən dəqiq A ədədinin daxil olduğu aralığı tapmaq mümkündür.

$$a - \Delta^* a \leq A \leq a + \Delta^* a$$

Bu halda dəqiq A ədədinin qiyməti aşağıdakı kimi yazılır.

$$A = a \pm \Delta^* a$$

Mütləq xəta və mütləq xətanın hədd qiymətinə görə hesablamaların dəqiqliyini xarakterizə etmək həmişə kifayət deyil. Ona görə yeni anlayış – nisbi xəta anlayışından istifadə edilir və o aşağıdakı kimi hesablanır.

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{|A|}$$

Mütləq xətanın hədd qiymətində olduğu kimi nisbi xətanın hədd qiyməti - δ_a^* anlayışında istifadə olunur.

$$\delta_a^* \geq \delta_a \Rightarrow \delta_a^* \geq \frac{\Delta a}{|A|} \Rightarrow \Delta a \leq |A| \delta_a^*$$

olduğunu nəzərə alsaq $\Delta^* a = |A| \delta_a^*$ qəbul edə bilərik. Dəqiq A ədədi məlum olmadığından və $A \approx a$ qəbul edilə biliniyini nəzərə alsaq $\Delta^* a = |a| \delta_a^*$ münasibətini alırıq. Qeyd etmək lazımdır ki, nisbi xəta və nisbi xətanın hədd qiyməti kəmiyyətin ölçü vahidindən asılı deyil və çox vaxt faizlərlə ifadə olunur. Verilən düsturların köməyi ilə mütləq və nisbi xətanı, mütləq və nisbi xətanın hədd qiymətlərini müəyyən etmək olar.

Misal 1. a) $A=184.27, a=184.264$. Mütləq və nisbi xətanı tapan.

$$\Delta a = |A - a| = |184.27 - 184.264| = |0.006| = 0.006$$

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{|A|} = \frac{0.006}{184.27} = 0.0000326$$

b) Kəmiyyətin təqribi $a=185$ qiyməti 0.04 dəqiqliklə alınmışdır. Kəmiyyətin dəqiq qiymətinin yerləşdiyi aralığı və nisbi xətanın hədd qiymətini tapan. $\Delta^* a = 0.04$

$$a - \Delta^* a \leq A \leq a + \Delta^* a \Rightarrow 185 - 0.04 \leq A \leq 185 + 0.04 \Rightarrow 184.96 \leq A \leq 185.04$$

$$\delta_a^* = \frac{\Delta^* a}{|a|} = \frac{0.04}{185} \approx 0.000216$$

c) Kəmiyyətin ədədi qiyməti yuvarlaqlaşdırılaraq 51.2 alınmışdır ($a=51.2$). Kəmiyyətin dəqiq qiymətinin yerləşdiyi aralığı tapan. Yuvarlaqlaşdırma qaydalarına görə mütləq xəta 0.05-dən çox ola bilməz. Daha doğrusu mütləq xətanın hədd qiyməti 0.05-i aşmır: $\Delta^* a = 0.05$.

$$a - \Delta^* a \leq A \leq a + \Delta^* a \Rightarrow 51.2 - 0.05 \leq A \leq 51.2 + 0.04 \Rightarrow 51.15 \leq A \leq 51.24$$

Praktik məsələlərin həllində xətalrı müxtəlif olan təqribi ədədlər üzərində müəyyən

Əməliyyatlar aparılır və alınmış nəticənin xətasını qiymətləndirmək lazım gəlir. Məsələn, düzbucaqlının tərəflərinin təqribi qiymətləri və xətaları məlum olduqda perimetrinin və sahəsinin xətasını qiymətləndirmək üçün təqribi ədədlər üzərində toplama və vurma əməlləri zamanı xətanın qiymətləndirilməsini bilmək lazımdır. Eləcədə təqribi ədədlər üzərində bölmə, qüvvətə yüksəltmə, kokalma və müxtəlif əməliyyatlar aparıldıqda nəticənin xətasını qiymətləndirmək üçün qaydalar məlum olmalıdır.

Cəmin xətası.

Teorem 1. Bir neçə təqribi ədədin cəbri cəminin mütləq xətası həmin təqribi ədədlərin mütləq xətalарının cəmindən böyük deyildir.

İsbatı. Tutaq ki, $a_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ təqribi ədədləri, onların dəqiq $A_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ qiymətləri və mütləq xətalарı $\Delta a_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ verilmişdir. Aşağıdakı işarələmələri aparaq və cəmin mütləq xətasını qiymətləndirək.

$$a = \sum_{i=1}^n a_i \quad A = \sum_{i=1}^n A_i$$

$$\Delta a = |A - a| = \left| \sum_{i=1}^n A_i - \sum_{i=1}^n a_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n (A_i - a_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n |A_i - a_i| = \sum_{i=1}^n \Delta a_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta a \leq \sum_{i=1}^n \Delta a_i$$

Teorem isbat olundu.

Tapılanların mütləq xətalарı ilə mütləq xətalарının hüdud qiyməti arasında

$$\Delta a_i \leq \Delta^* a_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n) \Rightarrow \Delta a \leq \sum_{i=1}^n \Delta a_i \leq \sum_{i=1}^n \Delta^* a_i$$

münasibətini və cəm üçün $\Delta a \leq \Delta^* a$ şərtini nəzərə alsaq, cəbri cəmin mütləq xətasının hüdud qiyməti üçün aşağıdakı münasibəti alarıq.

$$\Delta^* a = \sum_{i=1}^n \Delta^* a_i$$

Nəticədə bir neçə təqribi ədədin cəbri cəminin mütləq xətasının hüdud qiymətinin həmin təqribi ədədlərin mütləq xətalарının hüdud qiymətləri cəminə bərabər olduğunu alarıq.

Teorem 2. Bir neçə təqribi ədədin (eyni işarəli) cəminin nisbi xətası bu ədədlərin nisbi xətalарının ən böyüyünü aşmır.

İsbatı. Tutaq ki, $a_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ təqribi ədədləri, onların dəqiq $A_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ qiymətləri, mütləq və nisbi xətalарı $\Delta a_i, \delta_{a_i}, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ verilmişdir.

$$\delta^* = \min \{ \delta_{a_1}, \delta_{a_2}, \dots, \delta_{a_n} \} \quad \forall \delta \quad \delta^{**} = \max \{ \delta_{a_1}, \delta_{a_2}, \dots, \delta_{a_n} \}$$

işarələmələrini aparıb, $\Delta a_i = |A_i| \delta_{a_i}$ olduğunu nəzərə alıb cəmin nisbi xətasını aşağıdakı kimi çevirək.

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{|A|} = \frac{\Delta a}{\sum_{i=1}^n |A_i|} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta a_i}{\sum_{i=1}^n |A_i|} = \frac{\sum_{i=1}^n |A_i| \delta_{a_i}}{\sum_{i=1}^n |A_i|}$$

$$\delta^* = \frac{\delta^* \sum_{i=1}^n |A_i|}{\sum_{i=1}^n |A_i|} \leq \delta_a = \frac{\sum_{i=1}^n |A_i| \delta_{a_i}}{\sum_{i=1}^n |A_i|} \leq \frac{\delta^{**} \sum_{i=1}^n |A_i|}{\sum_{i=1}^n |A_i|} = \delta^{**}$$

Deməli eyni işarəli toplananların cəminin nisbi xətasının hədd qiyməti toplananların nisbi xətalarnın hədd qiymətlərinin ən böyüyü ilə ən kiçiyi arasında yerləşir. Fərqin mütləq xətası 1-ci teoremlə müəyyən olunur. Çünki teoremdə cəbri cəmdən söhbət gedir. Tərifdən istifadə edərək fərqin mütləq və nisbi xətalarnı müəyyən edək.

$$a = a_1 - a_2, A = A_1 - A_2 \quad \Delta a = |A - a| = |A_1 - a_1 - (A_2 - a_2)| \leq |A_1 - a_1| + |A_2 - a_2| = \Delta a_1 + \Delta a_2$$

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{|A|} = \frac{\Delta a_1 + \Delta a_2}{A_1 - A_2}$$

Düsturdan da görünür ki, əgər ədədlərin dəqiq, eləcə də təqribi qiymətləri biri-birinə çox yaxındırsa nisbi xətanın qiyməti böyüyə bilər. Praktiki məsələlərin həllində həmişə çalışırlar ki, biri-birinə yaxın ədədlərin fərqinin nisbi xətalarnı qiymətləndirilməsin.

Hasilin xətası.

Teorem 3. Sıfırdan fərqli təqribi ədədlərin hasilinin nisbi xətası, vuruqların nisbi xətalarnı cəmindən böyük deyil.

İsbatı. Fərz edək ki, vuruqlar müsbət ədədlərdir və hasilin loqarifmindən və funksiyanın artımı ilə diferensial arasında təqribi əlaqə düsturundan istifadə edək.

$$a = \prod_{i=1}^n a_i \Rightarrow \ln a = \sum_{i=1}^n \ln a_i \quad \Delta \ln a \approx d(\ln a) \approx \frac{\Delta a}{a}$$

Bu deyilənləri nəzərə alsaq aşağıdakı münasibəti alarıq.

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta a_1}{a_1} + \frac{\Delta a_2}{a_2} + \dots + \frac{\Delta a_n}{a_n} \Rightarrow \left| \frac{\Delta a}{a} \right| \leq \left| \frac{\Delta a_1}{a_1} \right| + \left| \frac{\Delta a_2}{a_2} \right| + \dots + \left| \frac{\Delta a_n}{a_n} \right|$$

Təqribi diferensiallama düsturundan istifadə etdikdə fərz etdik ki, Δa_i -lər kiçikdir.

Yəni kəmiyyətin dəqiq və təqribi qiymətlərinin biri-birinə yaxındır ($A_i \approx a_i$).

$$\left| \frac{\Delta a_i}{A_i} \right| \approx \left| \frac{\Delta a_i}{a_i} \right| = \delta_i \quad \left| \frac{\Delta a}{A} \right| = \delta$$

İşarələmələrini nəzərə alsaq hasilin xətası üçün aşağıdakı düsturu alırıq

$$\delta \leq \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n.$$

Teorem isbat olundu.

Hasilin nisbi xətası üçün alınmış düstur vuruqlar müxtəlif işarəli olduqda da doğrudur.

Nəticə. Hasilin nisbi xətasının hədd qiyəti, vuruqların nisbi xataları cəminə bərabərdir. Əgər təqribi ədəd sıfırdan fərqli dəqiq ədədə vurularsa onda nisbi xətanın hədd qiyəti dəyişmir, mütləq xətanın hədd qiyəti isə həmin ədədə vurulur.

Nisbətənin xətası.

Teorem 4. Nisbətənin nisbi xətası bölünən və bölənənin nisbi xətalrı cəmindən böyük deyil.

$$a = \frac{x}{y} \Rightarrow \ln a = \ln x - \ln y \Rightarrow \Delta \ln a \leq \Delta \ln x + \Delta \ln y$$

$$\Delta \ln a \approx d(\ln a) \approx \frac{\Delta a}{a}$$

olduğunun nəzərə alaq.

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \Rightarrow \delta_a \leq \delta_x + \delta_y$$

Teorem isbat olundu.

Nisbətənin nisbi xətasının hədd qiyəti bölünən və bölənənin nisbi xətalrının cəminə bərabərdir. $\delta_a^* = \delta_x^* + \delta_y^*$

Qeyd. Hasilin eləcə də nisbətənin nisbi və mütləq xətalrının hədd qiyətləri arasında aşağıdakı münasibəti yazı bilərik. $\Delta^* a = |a| \delta_a^*$

Qüvvətənin xətası.

Teorem 5. Təqribi ədədin n dərəcədən qüvvətənin nisbi xətasının hədd qiyəti həmin ədədin nisbi xətasının hədd qiyətindən n dəfə böyükdür ($n \in N$).

İsbati. $a = a_1^n = a_1 a_1 a_1 \dots a_1$. Hasilin nisbi xətasının düsturundan istifadə edək.

$$\delta^* = \delta_1^* + \delta_1^* + \dots + \delta_1^* = n \delta_1^*.$$

Teorem isbat olundu.

Misal. Kubun tərəfi 0.1 sm dəqiqliklə ölçülərək $a = 2.1 \text{ sm}$ alınmışdır. Kubun həcmənin xətasını tapın: $V = a^3$.

Şərtə görə,

$$\Delta^* a = 0.1, \quad \delta_a^* = \frac{\Delta^* a}{a} = \frac{0.1}{2.1} = 0.0476, \quad \delta_v^* = 3 * \delta_a^* = 3 * 0.0476 = 0.1428$$

$$\Delta^* v = V * \delta^* a = 9.261 * 0.1428 = 1.31428$$

Kökün xətası

Teorem 6. n dərəcədən kökün nisbi xətasının hüdud qiyməti kökaltı ədədin nisbi xətasının hüdud qiymətindən n dəfə az olur.

İsbatı. $a = \sqrt[n]{a_1} \Rightarrow a_1 = a^n \Rightarrow \delta_{a_1}^* = n\delta_a^* \Rightarrow \delta_a^* = \frac{1}{n}\delta_{a_1}^*$. Teorem isbat olundu.

Xətalər nəzəriyyəsinin əsas məsələsi

Tutaq ki, diferensiallanan çoxdəyişənli $y = f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ funksiyası verilmişdir. $a_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ dəyişənlərinin mütləq xətaləri $\Delta a_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ məlumdur və funksiyanın mütləq xətasının qiymətləndirilməsi və əksinə funksiyanın məlum xətasına görə arqumentin xətasının qiymətləndirilməsi xətalər nəzəriyyəsinin əsas məsələsidir. $\Delta a_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ mütləq xətalərinin kiçik, onların yüksək qüvvətlərinin daha kiçik olduğunu nəzərə alıb funksiyanın mütləq xətasını qiymətləndirək.

$$\Delta y = \Delta f = \left| f(a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2, \dots, a_n + \Delta a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) \right|$$

$$\Delta y \approx \left| df(a_1, a_2, \dots, a_n) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial a_i} \Delta a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial a_i} \right| |\Delta a_i|$$

$$\Delta y \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial a_i} \right| |\Delta a_i| \quad (1)$$

Funksiyanın mütləq xətasının hüdud qiymətini $\Delta^* y$ -lə işarə etsək funksiyanın mütləq xətasının hüdud qiyməti üçün aşağıdakı münasibəti alırıq.

$$\Delta^* y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial a_i} \right| |\Delta^* a_i| \quad (1^*)$$

(1)-in hər tərəfini y -ə bölsək və çevirmələr aparsaq nisbi xətanın hüdud qiyməti üçün aşağıdakı münasibəti alırıq.

$$\delta \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial a_i}}{y} \right| |\Delta a_i| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial a_i} \ln f(a_1, a_2, \dots, a_n) \right| |\Delta a_i| \quad (2)$$

$$\delta_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial a_i} \ln f(a_1, a_2, \dots, a_n) \right| \left| \Delta^* a_i \right| \quad (2^*)$$

(1)-(2) düsturlarından istifadə edərək cəmin, hasilin, qüvvətin və kökün xətlərinin qiymətləndirilməsi haqqında teoremlərin nəticələrini almaq olar.

Məsələn, (1) düsturundan istifadə edərək cəmin mütləq xətasını qiymətləndirmək olar.

$$y = f(a_1, a_2) = a_1 + a_2, \quad \frac{\partial f}{\partial a_1} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial a_2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Delta y \leq \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial f}{\partial a_i} \right| \left| \Delta a_i \right| = \frac{\partial f}{\partial a_1} \Delta a_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} \Delta a_2 = \Delta a_1 + \Delta a_2 \Rightarrow \Delta y \leq \Delta a_1 + \Delta a_2$$

Misal 1. Verilənlərə görə silindirin həcmnin mütləq və nisbi xətasının hədd qiymətlərini tapın. $\pi = 3.14, H = 2 \pm 0.01, R = 3 \pm 0.02$. Bu verilənlərə görə silindirin həcmnin xətasını qiymətləndirmək üçün həcmə ($V = \pi R^2 H$) π, H, R dəyişənlərindən asılı funksiya kimi baxaq və bu dəyişənlərə nəzərən xüsusi törəmələri tapanaq.

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = R^2 H, \quad \frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi R H, \quad \frac{\partial V}{\partial H} = \pi R^2$$

(1*) düsturundan istifadə etmək üçün qeyd olunan dəyişənlərin təqribi qiymətlərini və onların mütləq xətlərinin hədd qiymətlərini müəyyən edib, hesabları yerinə yetirək.

$$\pi = 3.14, \Delta^* \pi = 0.0016, H = 2, \Delta^* H = 0.01, R = 3, \Delta^* R = 0.02$$

$$\begin{aligned} \Delta^* V &= \left| \frac{\partial V}{\partial \pi} \right| \left| \Delta^* \pi \right| + \left| \frac{\partial V}{\partial R} \right| \left| \Delta^* R \right| + \left| \frac{\partial V}{\partial H} \right| \left| \Delta^* H \right| = R^2 H \left| \Delta^* \pi \right| + 2\pi R H \left| \Delta^* R \right| + \pi R^2 \left| \Delta^* H \right| = \\ &= 18 \Delta^* \pi + 37.68 \Delta^* R + 28.26 \Delta^* H = 1.065 \end{aligned}$$

$$V = \pi R^2 H = 56.52$$

$$\delta^* v = \frac{1.065}{56.52} = 0.0189 \approx 1.9\%$$

Praktik məsələlərin həllində bəzən arqumentin elə mütləq xətası axtarılır ki, funksiyanın mütləq xətası verilən həddi aşmasın. Bu halda əgər məhdudiyət yalnız bir dəyişən üzərinə qoyularsa məsələni bir qiymətli həll etmək olar. Funksiyanın verilmiş ifadəsindən xətası axtarılan dəyişən tapılır. Alınmış yeni funksiya üçün (1), (1*), (2), (2*) düsturlarından istifadə edərək qoyulan tərs məsələni həll etmək olar. Əgər funksiyanın dəyişənlərinin heç birinin xətası məlum deyilsə, bu halda məsələ qeyri müəyyəndir. Belə məsələnin həllində fərz edilir ki, funksiyanın mütləq xətasının formalaşmasında bütün dəyişənlərin təsiri eynidir (bu bəzi ədəbiyyatlarda eyni təsir prinsipi adlanır). (1*) düsturunda deyilənləri nəzərə alsaq, yəni

$$\left| \frac{\partial f}{\partial a_1} \Delta^* a_1 \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial a_2} \Delta^* a_2 \right| = \dots = \left| \frac{\partial f}{\partial a_n} \Delta^* a_n \right| = \frac{\Delta^* y}{n}$$

olduğunu nəzərə alsaq hər bir dəyişənin mütləq xətasının hədd qiyməti üçün aşağıdakı münasibəti alırıq.

$$\Delta^* a_i = \frac{\Delta^* y}{n \left| \frac{\partial f}{\partial a_i} \right|}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Misal 3. Silindirin oturacağıın radiusu $2m$, hündürlüyü isə $3m$ -ə bərabərdir. Silindirin həcmnin mütləq xətasının, $\Delta^* V = 0.1$ -i aşmaması üçün radius və hündürlüyün mütləq xətası nə qədər olmalıdır? $\pi = 3.14, H = 3, R = 2$ olduğunu nəzərə alıb (3) düsturundan istifadə edək.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \pi} = R^2 H = 12 & \quad \Delta^* \pi = \frac{0.1}{3 * 12} < 0.003 \\ \frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi R H = 37.7 & \quad \Delta^* R = \frac{0.1}{3 * 37.7} < 0.001 \\ \frac{\partial V}{\partial H} = \pi R^2 = 12.6 & \quad \Delta^* H = \frac{0.1}{3 * 12.6} < 0.003 \end{aligned}$$

Deməli silindirin mütləq xətasının verilən həddi aşmaması üçün radiusun və hündürlüyün mütləq xətalarmın hədd qiyməti uyğun olaraq 0.001 və 0.003 metri aşmamalıdır.

2-ci mövzu

Birdəyişənli qeyri-xətti tənliklər

Əksər mühəndis məsələlərinin riyazi modelləri tənliklərlə təsvir olunur və bu tənliklərin həlli praktik əhəmiyyət kəsb edir. Ümumi halda birdəyişənli tənlik aşağıdakı kimi göstərilə bilər: $\varphi(x) = g(x)$. Əgər $f(x) = \varphi(x) - g(x)$ qəbul etsək onda tənlik aşağıdakı şəkildə yazılır.

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

$f(x)$ funksiyasının təyin olunduğu oblast (1) tənliyinin təyin oblastı adlanır. Dəyişənin (1) tənliyini eyniliyə çevirən qiymətlər çoxluğuna həllər çoxluğu, bu çoxluqdan götürülmüş hər bir qiymətə isə tənliyin kökü deyilir. Aydındır ki, həllər çoxluğu (1)-in təyin oblastında yerləşir. Məsələn,

1. $\sin x = 0$. $x = \pi * n$ $n \in Z$ tənliyin həllər çoxluğudur. $\pi, -2\pi, 10\pi$ ədədlərinin hər biri tənliyin köküdür.

2. $\sin x = 2$ tənliyinin həllər çoxluğu boş çoxluqdur.

3. $x - 5 = 0$ tənliyinin həllər çoxluğu $\{5\}$ bir elementdən ibarətdir.

4. $x^2 + 4 = 0$, $x = \pm 2i$ tənliyinin həllər çoxluğudur. $2i$ və $-2i$ kompleks ədədlərinin hər biri tənliyin köküdür.

(1)-də $f(x)$ funksiyasından asılı olaraq tənliklər cəbri və transendent kimi iki sinfə bölünür. Əgər $f(x)$ funksiyasında hesab və qüvvətə yüksəltmə əməlləri iştirak edərsə, onda bu funksiya cəbri (rasional və irrasional) funksiya, (1) isə cəbri tənlik adlanır və ümumi şəkildə aşağıdakı kimi yazılır.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (2)$$

n -ci dərəcədən kökalma əməli də, $\frac{1}{n}$ dərəcədən qüvvətə yüksəltmə kimi göstərilə

bilər. Məsələn,

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} = 3 \quad (3)$$

irrasional tənliyi çevirməldən sonra

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad (4)$$

tənliyinə gətirilir. Ancaq (3) və (4) tənliklərinin təyin oblastları eyni deyil. (3) tənliyi $[1;6]$ parçasında, (4) isə bütün həqiqi ədələr çoxluğunda təyin olunmuşdur. Əgər $f(x)$ -də üstlü, loqarifmik, triqonometrik və tərs triqonometrik funksiyalardan heç olmazsa biri iştirak edə-

sə, onda (1) transendent tənlik adlanır.

Çox az hallarda tənliyin kökünün dəqiq qiymətini tapmaq mümkün olur. (2) tənliyində $n=2,3,4$ olduqda həllər çoxluğunu tapmaq mümkündür. Məhşur norveç riyaziyyatçısı Abel isbat etmişdir ki, $n \geq 5$ olduqda (2) tənliyinin həll düsturu yoxdur və bəzi xüsusi hallarda həllər çoxluğu tapıla bilər.

Bir çox hallarda (1) tənliyinə daxil olan əmsallar təqribi qiymətləndirilir və aydındır ki, bu halda tənliyin kökünün dəqiq qiymətinin tapılması mahiyyət kəsb etmir. Bəzi praktik məsələlərin həllində isə tənliyin dəqiq kökünün tapılması zəruri hesab edilmir. Ona görə də (1) tənliyinin köklərinin təqribi qiymətinin tapılması məsələsinin praktik əhəmiyyəti vardır. Əvvəlcə təqribi kök anlayışını verək. Tutaq ki, x^* (1) tənliyinin dəqiq kökü, x isə ε dəqiqliklə təqribi kökdür. Bu o deməkdir ki,

$$|x - x^*| \leq \varepsilon \quad (5)$$

şerti ödənilir. Bu halda $\forall x \in [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$ (1) tənliyinin ε dəqiqliklə təqribi kökdür. Deməli (1) tənliyinin sonsuz sayıda ε dəqiqliklə təqribi kökü var. Əgər $x^* \in [a, b]$ və $|a - b| \leq \varepsilon$ şərtləri ödənərsə, onda $|a - x^*| \leq |a - b| \leq \varepsilon$ və $|b - x^*| \leq |a - b| \leq \varepsilon$ şərtləri də ödənər. Bu halda a və b qiymətləri uyğun olaraq tənliyin əksiyyəti ilə və artıqlaması ilə ε dəqiqliklə təqribi kökləri kimi qəbul edilə bilər. Daha doğrusu $\forall x \in [a, b]$ (1) tənliyinin ε dəqiqliklə təqribi köküdür. Bir çox hallarda tənliyin x^* kökünün yerləşdiyi və $|a - b| \leq \varepsilon$ şərtini ödəyən $[a, b]$ parçasını tapmaq olmur. Bu halda təqribi kökün qiymətləndirilməsi üçün digər meyarlardan istifadə olunur.

(1) tənliyinin təqribi köklərinin tapılması üçün tətbiq olunan üsullar tənliyin cəbri və ya transendent olmasından asılı deyil. Tənliyin tələb olunan dəqiqliklə təqribi kökünün tapılması iki mərhələdə yerinə yetirilir.

1-ci mərhələ. Tənliyin köklərinin ayrılması.

2-ci mərhələ. Tənliyin ayrılmış kökünün tələb olunan dəqiqliklə dəqiqləşdirilməsi.

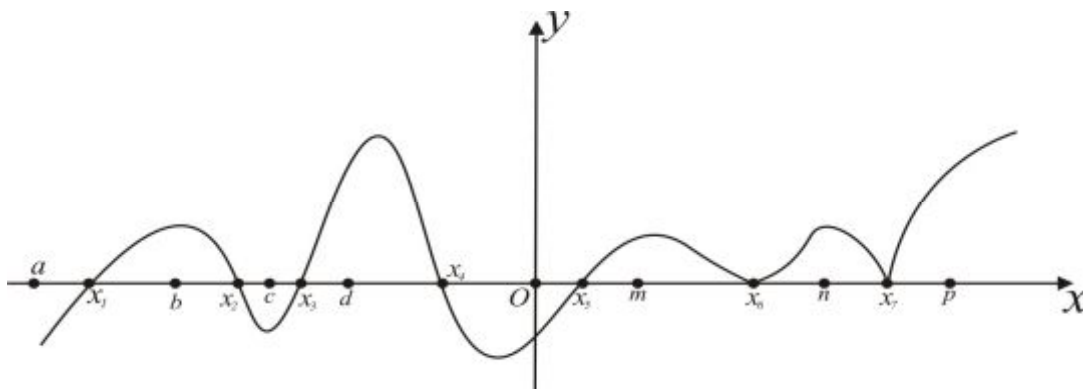
Tənliyin köklərinin ayrılması

Əgər (1) tənliyinin yalnız bir kökünü özündə saxlayan parça tapmaq mümkünsə onda deyirlər ki, verilən tənliyin kökü ayrılmışdır. Bu parçaların tapılma prosesinə köklərin ayrılması deyilir və iki üsulla yerinə yetirilir: *qrafik və analitik* üsul.

Qrafik üsul. Əgər tənlik $f(x) = 0$ şəklindədirsə, $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki quru-

lur və qurulmuş qrafikə əsasən tənliyin yalnız bir kökünü, yəni qrafikin absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsini özündə saxlayan parçalar müəyyən olunur. Bu qayda ilə qrafiki dəqiq qurmaqla hətta müəyyən dəqiqliklə tənliyin təqribi kökünü də tapmaq olar.

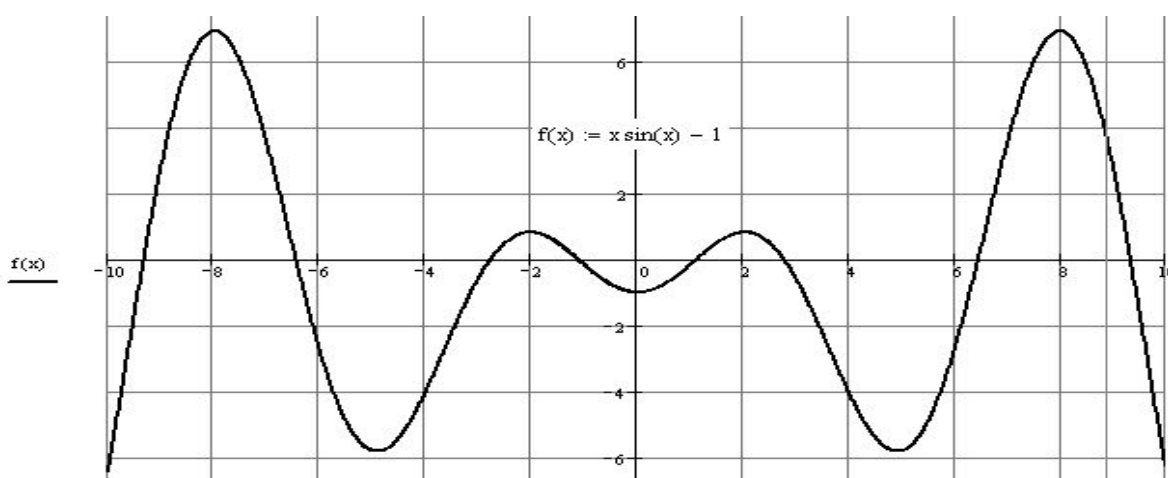
Əgər tənlik $\varphi(x) = g(x)$ şəkilindədirsə onda $y = \varphi(x)$ və $y = g(x)$ funksiyalarının eyni bir koordinat müstəvisində qrafikləri qurulur və bu qrafiklərin kəsişmə nöqtələrinin absislərinin, yəni tənliyin köklərinin yerləşdiyi parçalar müəyyən olunmaqla köklər ayrılır.



Şəkil 3.1.

Şəkil 3.1.-də $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki qurulmuşdur. Qrafikdə $f(x) = 0$ tənliyinin kökləri, yəni qrafikin ox oxu ilə ortaq $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ nöqtələri göstərilmişdir. Bu qrafikə görə tənliyin köklərinin yerləşdiyi parçaları $x_1 \in [a,b], x_2 \in [b,c], x_3 \in [c,d], x_4 \in [d,0], x_5 \in [0,m], x_6 \in [m,n], x_7 \in [n,p]$ müəyyən etmək mümkündür.

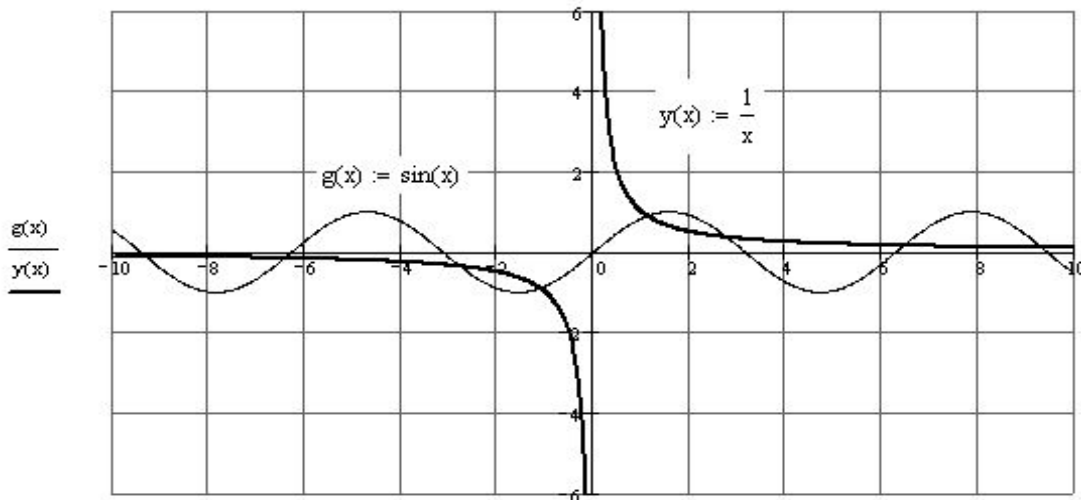
Misal 1. $x \sin(x) - 1 = 0$ tənliyinin köklərini ayıraq. Aydındır ki, tənliyin sonsuz sayda kökləri var və bu köklər koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik yerləşir. $f(x) = x \sin(x) - 1$ funksiyasının qrafikini Mathcad mühitində quraq. Qurulmuş qrafikə görə tənliyin köklərinin



Şəkil 3.2.

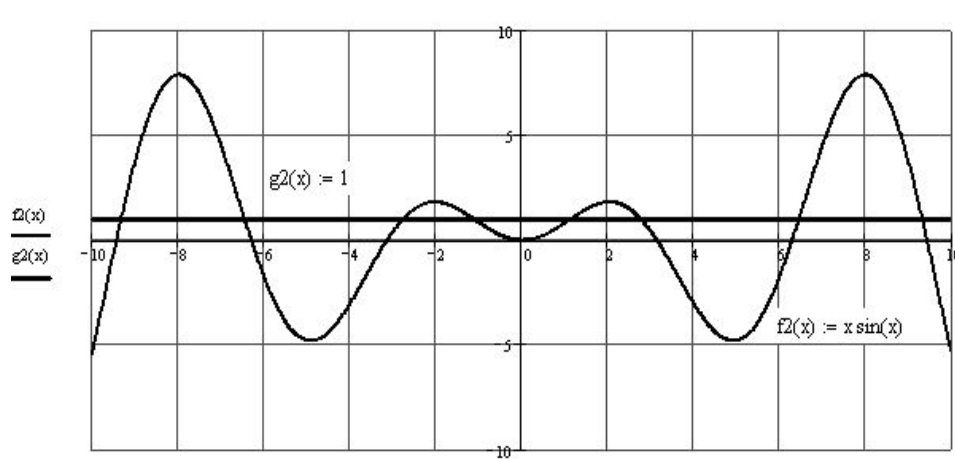
yerləşdiyi intervallar müəyyən oluna bilər (şəkil3.2). Tənlikdə çevirmələr aparıb müxtəlif qrafiklər qurmaqla da eyni bir tənliyin köklərini müxtəlif qrafiklərə görə ayırmaq olar.

Verilən tənliyi $\sin(x) = \frac{1}{x}$ şəklində göstərək. $\varphi(x) = \sin(x)$ və $g(x) = \frac{1}{x}$ işarələmələrini aparıb eyni bir koordinat müstəvisində $y = \varphi(x)$ və $y = g(x)$ funksiyalarının qrafiklərini quraq (şəkil 3.3). Hər iki funksiya tək olduğundan onların qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir. Deməli , tənliyin kökləri də koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik



Şəkil 3.3.

olacaq. Tənliklərin təyin oblastlarının müxtəlif olmasına baxmayaraq hər iki tənliyin həllər çoxluğu eynidir. Tənliyi $x \sin(x) = 1$ şəklində yazıb $\varphi_1(x) = x \sin(x)$ və $g(x) = 1$ işarələmələrini aparıb qrafikləri quraq (şəkil 3.4).

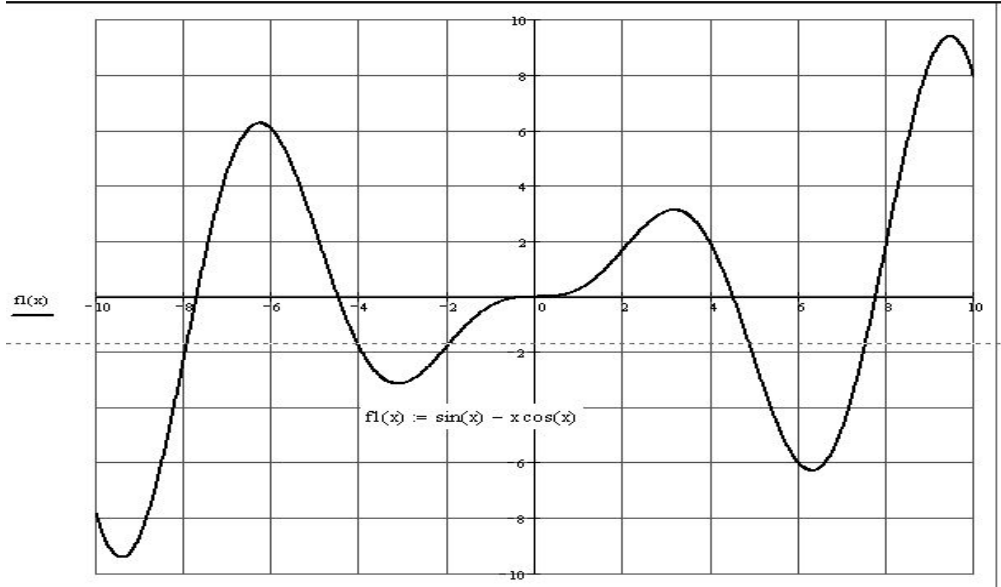


Şəkil 3.4.

Hər üç qrafikə görə tənliyin köklərinin yerləşdiyi parçaları müəyyən edə bilərik. Tənliyin kökləri $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ və $\left[\frac{\pi}{2} + \pi(n-1), \frac{\pi}{2} + \pi n\right], n \in \mathbb{N}$ parçalarında yerləşir. Deməli, qrafiklərə

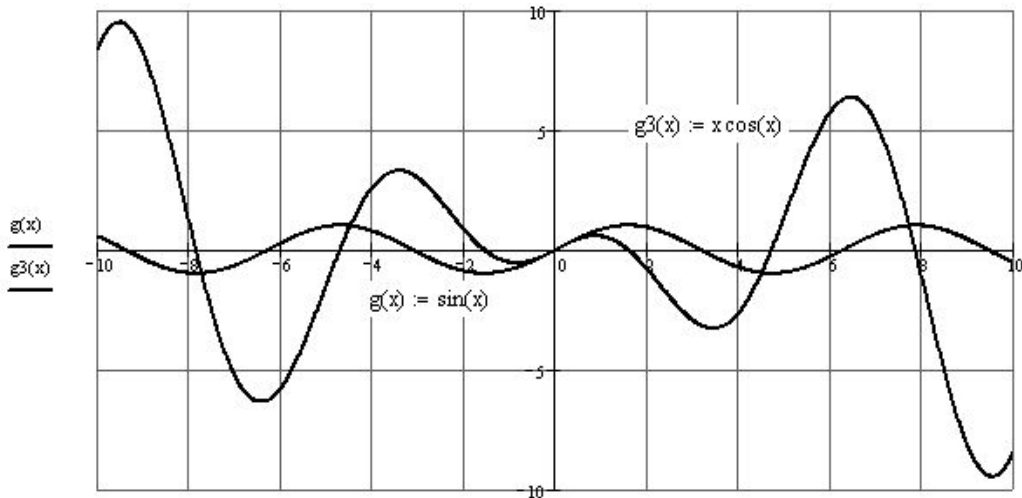
görə tənliyin köklərini ayırdıq.

Misal 2. $\sin(x) - x \cos(x) = 0$ tənliyinin köklərini ayıraq. Qrafikləri Mathcad mühitində quraq. $f(x) = \sin(x) - x \cos(x)$ tək funksiya olduğundan onun qrafiki, eləcədə ox oxu ilə kəsişmə nöqtələri koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik yerləşəcək. Ona görə də tənliyin müsbət köklərini ayıraq. Şəkil 3.5-də $f(x)$ funksiyanın qrafiki qurulmuşdur.



Şəkil 3.5.

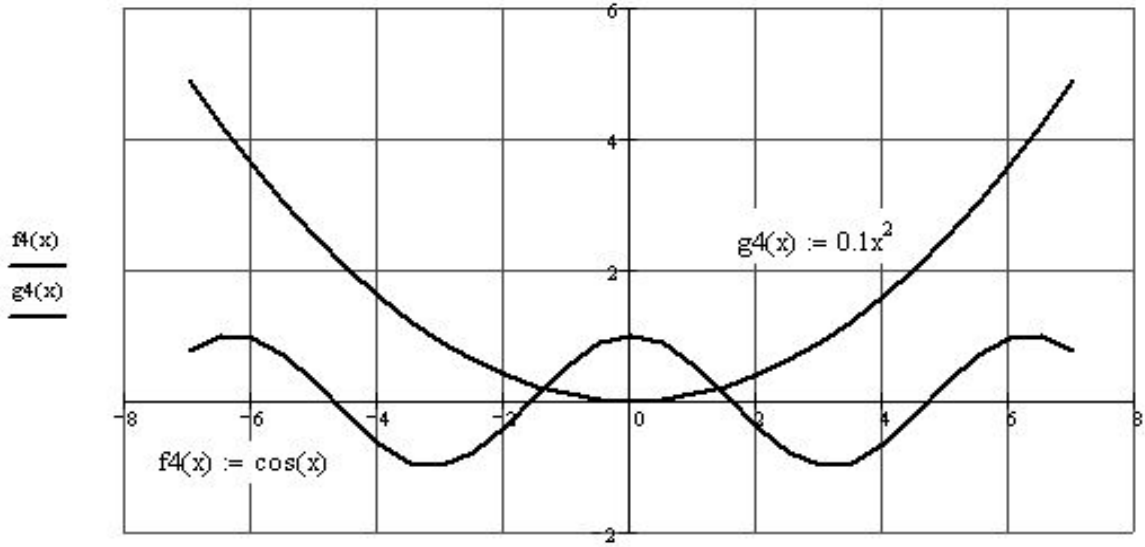
Tənliyi $\sin(x) = x \cos(x)$ şəkilində yazıb $g(x) = \sin(x)$, $g3(x) = x \cos(x)$ funksiyanın qrafikini quraq və tənliyin köklərinin ayrılmasında hər iki qrafikdən istifadə edək. $x = 0$ tənliyin köküdür. $x = \pi n$ nöqtələrində $g(x) = \sin(x)$ funksiyası sifıra çevrilir, $g3(x) = x \cos(x)$ funksiyası isə n -in tək qiymətlərində minimum, cüt qiymətlərində isə maksimum qiymət alır. Şəkil 3.5 və şəkil 3.6-da verilən qrafiklərdə ekstremum nöqtələrini görmək mümkündür.



Şəkil 3. 6.

π və 2π nöqtələri arasında $f_1(x)$ funksiyasının qrafiki ox oxunu (şəkil 3.5.), $g(x), g_3(x)$ funksiyalarının qrafikləri isə bir-birini kəsir (şəkil 3.6). Asanlıqla görmək olar ki, tənliyin müsbət kökləri $[\pi n, \pi(n+1)], n \in \mathbb{N}$ parçalarında yerləşir. $f_1(x)$ funksiyası tək olduğundan mənfi köklər $[-\pi(n+1), -\pi n], n \in \mathbb{N}$ parçalarında yerləşəcəkdir.

Misal 3. $\cos(x) = 0.1x^2$ tənliyinin köklərini ayıraq. $f(x) = \cos(x) - 0.1x^2$ funksiyası cüt olduğundan onun qrafiki və ox oxu ilə kəsişmə nöqtələri oy oxuna nəzərən simmetrik yerləşəcəkdir.



Şəkil 3.7.

Şəkil 3.7.-də $f_4(x) = \cos(x), g_4(x) = 0.1x^2$ funksiyalarının qrafikləri verilmişdir. Qrafikdən görünür ki, bu funksiyaların qrafiki iki nöqtədə kəşir. Kəsişmə nöqtələrinin absisləri uyğun olaraq $[-2, 0], [0, 2]$ parçalarında yerləşir.

Analitik üsul. $f(x) = 0$ tənliyinin köklərinin analitik üsulla ayrılması riyazi analiz kursunda öyrənilən funksiyanın artması, azalması, təkliyi, cütlüyü, monotonluğu, aşağıya və yuxarıya qabarıqlığı, kəsilməz funksiyanın parçada ən böyük və kiçik qiymətini alması kimi xassə və teoremlərə əsaslanır. Köklərin ayrılmasında aşağıdakı teoremlərdən istifadə edəcəyik.

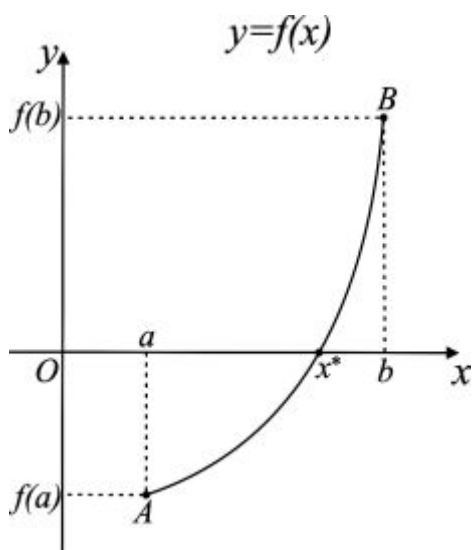
Teorem 1. $[a, b]$ parçasında kəsilməz olan $f(x)$ funksiyası parçanın uclarında müxtəlif işarəli qiymətlər alırsa, onda bu parçada $f(x) = 0$ tənliyinin heç olmazsa bir kökü var.

Teorem 2. $[a, b]$ parçasının uclarında müxtəlif işarəli qiymətlər alan $f(x)$ funksiyası bu parçada kəsilməz və monoton olarsa, onda bu parçada $f(x) = 0$ tənliyinin yeganə kökü var.

Teorem 3. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməz və paçanın uclarında müxtəlif işarəli qiymətlər alırsa, $f'(x)$ bu paçada işarəsini sabit saxlayırsa, onda $f(x) = 0$ tənliyinin bu paçada yeganə kökü var.

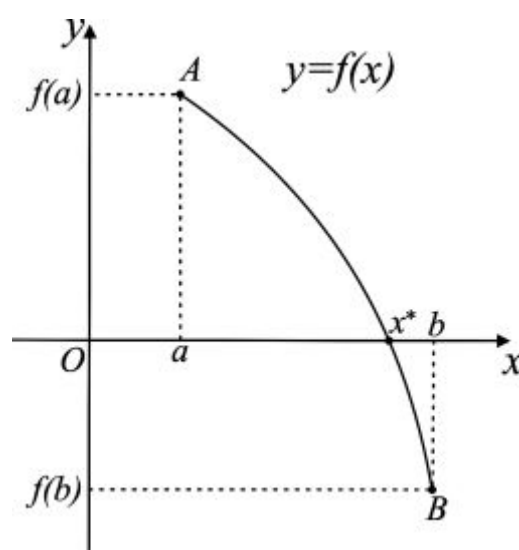
Tənliyin təqribi kökünün dəqiqləşdirilməsində funksiya qrafikinə aşağıdakı dörd halından istifadə edəcəyik. Bu halların hər birində tənliyin kökləri ayrılmışdır.

$$\begin{aligned} f(a) < 0, f(b) > 0 \\ f'(x) > 0, f''(x) > 0 \end{aligned}$$



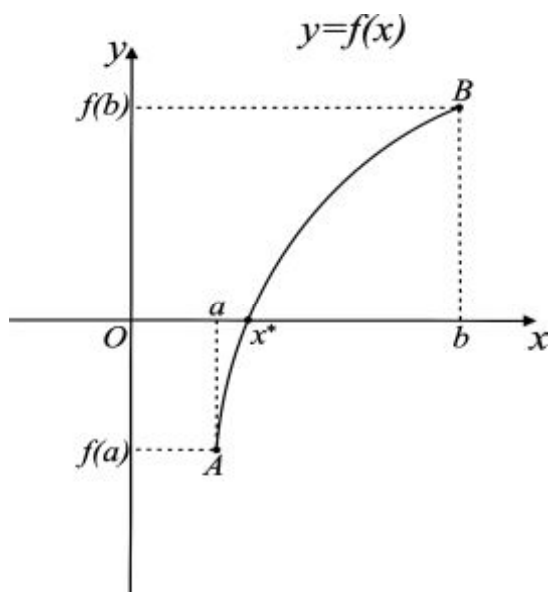
Şəkil 3.8.

$$\begin{aligned} f(a) > 0, f(b) < 0 \\ f'(x) < 0, f''(x) < 0 \end{aligned}$$



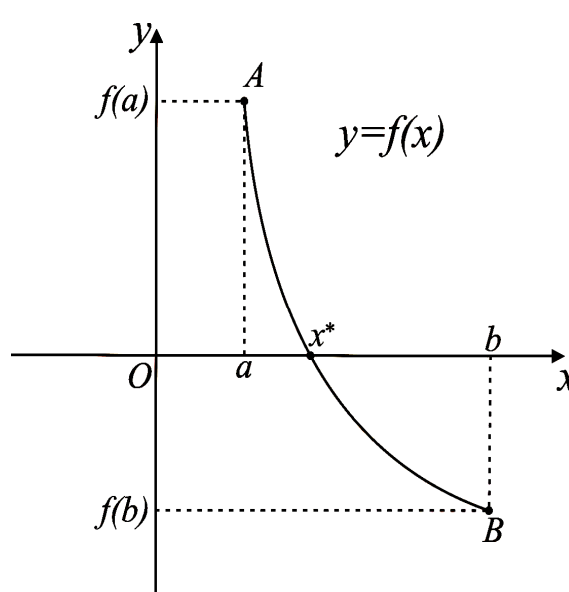
Şəkil 3.9.

$$\begin{aligned} f(a) < 0, f(b) > 0 \\ f'(x) > 0, f''(x) < 0 \end{aligned}$$



Şəkil 3.10.

$$\begin{aligned} f(a) > 0, f(b) < 0 \\ f'(x) < 0, f''(x) > 0 \end{aligned}$$



Şəkil 3.11.

Şəkil 3.8 və 3.9-da funksiyanın birinci və ikinci tərtib törəmələrini işarələri eyni, şəkil 3.10 və 3.11-də isə müxtəlifdir. Bu əlamətlərdən tənliyin təqribi kökünün dəqiqləşdirilməsində istifadə edəcəyik.

Misal 4. $\sin(x) - x \cos(x) = 0$ tənliyinin köklərini analitik üsulla ayıraq. Yuxarıda $\sin(x) - x \cos(x) = 0$ tənliyinin qrafik üsulla köklərini ayırdıq. Qeyd olundu ki, $f(x) = \sin(x) - x \cos(x)$ tək funksiya olduğundan onun ox oxu ilə kəsişmə nöqtələri koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik yerləşəcək. $f(x)$ funksiyanın birinci tərtib törəməsini tapaq. $f(x)$ və $f'(x) = x \sin(x)$ funksiyaları bütün ədəd oxunda təyin olunubdur. Yuxarıda qeyd olunan teoremlərdən istifadə etmək üçün $f'(x) = 0$ tənliyini həll edək.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$x > 0$ oblastında $f'(x) = x \sin(x)$ funksiyanın qrafiki ox oxunu $x = \pi n, n = 0, 1, 2, \dots$ nöqtələrində kəsir. Onda $[\pi n, \pi(n+1)], n \geq 1$ intervallarında $f'(x)$ funksiyası işarəsini sabit saxladığından $f(x)$ funksiyası monotondur. Qeyd olunan parçanın uclarında funksiyanın müxtəlif işarəli qiymətlər almasını yoxlayaq.

$$\begin{aligned} f(\pi n) f(\pi(n+1)) &= [\sin(\pi n) - \pi n \cos(\pi n)] * [\sin(\pi(n+1)) - \pi(n+1) \cos(\pi(n+1))] = \\ &= \pi^2 n(n+1) \cos(\pi n) \cos(\pi(n+1)) = \pi^2 n(n+1) (-1)^n (-1)^{n+1} = \\ &= \pi^2 n(n+1) * (-1)^{2n+1} = -\pi^2 n(n+1) < 0 \end{aligned}$$

Nəticədə alırıq ki, $f(x)$ funksiyası $[\pi n, \pi(n+1)], n \geq 1$ parçalarının uclarında müxtəlif işarəli qiymətlər alır. Bu parçaların hər birində funksiyanın birinci tərtib törəməsi işarəsini sabit saxladığından $f(x)$ funksiyası monotondur. 3-cü teoremə görə bu parçalarda tənliyin kökü yeganədir. $x = 0$ tənliyi ödədiyindən tənliyin köküdür. Bu kökün $[-\pi, \pi]$ parçasında yerləşdiyini və verilən tənliyin köklərinin koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik yerləşdiyini nəzərə alsaq tənliyin köklərinin ayrıldığı intervalları yaza bilərik.

$$[-\pi, \pi] \text{ və } [\pi n, \pi(n+1)], n = 1, \pm 2, \pm 3 \pm 4, \dots$$

Tənliyin köklərinin qrafik yoxsa analitik üsulla ayrılmasının əlverişli olması tənlikdən asılıdır. Ola bilər ki bir üsul ilə tənliyin köklərini ayırmaq mümkün olmasın. Məsələn, şəkil 3.1-də qrafikdə göstərilən x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 köklərini analitik üsullarla ayırmaq mümkün olduğu halda x_6, x_7 köklərini analitik üsulla ayırmaq mümkün deyil.

Misal 5. $x^3 - 3x + 1 = 0$ tənliyinin köklərini ayıraq. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunub. Bu funksiyanın artma və azalma aralıqlarını, böhran nöqtələrini tapaq.

$$f'(x) = 3x^2 - 3, f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Artma aralığı. $f'(x) > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Azalma aralığı. $f'(x) < 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow (-1; +1)$

$f(x)$ funksiyasının üfqi asimptotlarının olmadığını nəzərə alaraq və $(-\infty; -1)$ və $(1; +\infty)$ intervallarında $x = -2$ və $x = 2$ nöqtələrini qeyd edərək aşağıdakı cədvəli quraq.

$f(x)$ \ x	$x = -2$	$x \in (-2, -1)$	$x = -1$	$x \in (-1, 1)$	$x = 1$	$x \in (1, 2)$	$x = 2$
$sign(f'(x))$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	-1	artır	3	azalır	-1	artır	3

Bu cədvəldən görünür ki, $f(x)$ funksiyası $[-2, -1]$, $[-1, 1]$ və $[1, 2]$ parçalarının uclarında müxtəlif işarəli qiymətlər alır və bu aralıqlarda $f'(x)$ işarəsini sabit saxlayır. 3-cü teoremə görə bu parçalarda tənliyin yeganə kökü vardır. Deməli $[-2, -1]$, $[-1, 1]$ və $[1, 2]$ parçalarında tənliyin kökü ayrılmışdır.

Tapşırıq. Tənliklərin köklərini ayırın.

1. $x^3 - 2x - 5 = 0$
2. $2 - x = \ln(x)$
3. $x^2 \sin(x) = 1$

3-cü mövzü . Qeyri-xətti tənliklərin köklərinin dəqiqləşdirilməsi üsulları

Köklərin dəqiqləşdirilməsində parçanın yarıya bölünməsi, vətərlər (kəsənlər), toxunanlar, kəsənlər və toxunanlar üsulunun kombinasiyası və iterasiya (ardıcıl yaxınlaşma) üsullarına baxılır. İterasiya (ardıcıl yaxınlaşma) üsulu sıxılmış inikas prinsipinə əsaslanır və tətbiq sahələri daha genişdir. Baxılan üsullarda tənliyin kökünün ayrıldığı parça iki hissəyə bölünür. Tənliyin kökünün yerləşdiyi parça müəyyən edilərək iterasiyalar qurulur və tənliyin təqibi kökü dəqiqləşdirilir.

Parçanın yarıya bölünməsi üsulu

Qeyd etdik ki, qeyri-xətti tənliyin təqribi üsullarla həlli iki mərhələyə bölünür. Birinci mərhələdə tənliyin kökləri ayrılır, ikinci mərhələdə isə ayrılmış köklər dəqiqləşdirilir.

Tutaq ki (1) tənliyinin kökü $[a, b]$ -də ayrılmışdır, bu parçada $f(x)$ kəsilməzdir və $f(a) f(b) < 0$ şərti ödənilir. (1) tənliyinin kökünü ε dəqiqliklə tapmaq tələb olunur. Bunu

aşağıdakı qayda ilə yerinə yetirək. $[a,b]$ -ni $[a,c_0]$ və $[c_0,b]$ kimi iki hissəyə bölən c_0 nöqtəsi götürək. Əgər $f(c_0) = 0$ olarsa, $x = c_0$ tənliyin dəqiq köküdür, əks halda $[a,b]$ -də tənliyin kökü ayrıldığından bu kök $[a,c_0]$ və $[c_0,b]$ parçalarının birində yerləşməlidir. Əgər $f(a) f(c_0) < 0$ olarsa, tənliyin kökü $[a,c_0]$ parçasında, əks halda isə $[c_0,b]$ -də yerləşəcəkdir. Tənliyin kökünün yerləşdiyi parçanı $[a_1,b_1]$ kimi işarə edib, c_1 nöqtəsi ilə iki parçaya bölək. Tənliyin kökünün yerləşdiyi parçanı yuxarıda deyilən qayda ilə müəyyən edib prosesi davam etdirsək nəticədə

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \dots \supset [a_n,b_n]$$

parçalar ardıcılığı alırıq. Azalmayan $\{a_n\}$ ardıcılığı yuxarıdan, artmayan $\{b_n\}$ ardıcılığı isə aşağıdan tənliyin dəqiq x^* kökü ilə məhduddur. Məlumdur ki, $|a_n - b_n| \leq \varepsilon$ şərti ödəndikdə $\forall x \in [a_n,b_n]$ tənliyin ε dəqiqliklə köküdür. Tənliyin kökünün ayrıldığı parçanın c_i nöqtələri ilə iki parçaya ayrılmasını müxtəlif üsullarla yerinə yetirmək olar. Bu zaman c_i -lərin seçilməsi elə olmalıdır ki, iterasiya prosesi daha sürətli olmaqla, kompüterdə tətbiqi asan olsun.

1. Kompüterdə (0.1) aralığında təsadüfi ədədin alınması üçün standart funksiya (Rnd) nəzərdə tutulmuşdur. $c_i = a_i + |a_i - b_i| * Rnd$ düsturu ilə tənliyin dəqiq kökünün yerləşdiyi parça iki hissəyə bölünür.

2. Parçanı $\lambda : 1, \lambda > 0$ nisbətində bölən nöqtə

$$c_i = \frac{a_i + \lambda * b_i}{1 + \lambda}$$

düsturu ilə tapılır. λ parametrinə müsbət qiymətlər verməklə müxtəlif bölgü nöqtələri almaq olar. Praktikada c_i nöqtəsinin hər iki üsul ilə seçilməsindən istifadə olunur. $\lambda = 1$ olduqda tənliyin kökünün ayrıldığı parça yarıya bölünür və praktikada daha geniş istifadə olunur. Bu halda hər bir iterasiyada parçanın uzunluğunu hesablamaq olar.

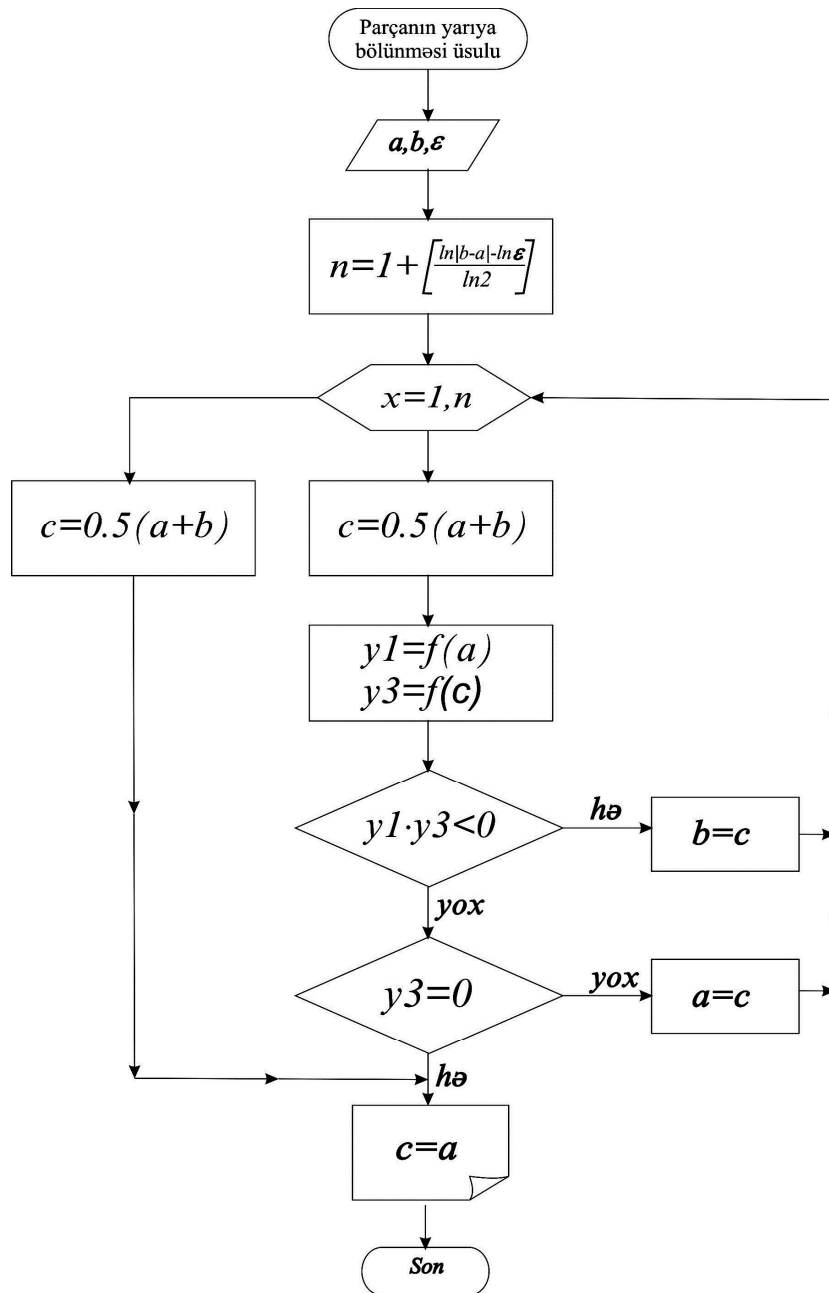
$$b_1 - a_1 = \frac{1}{2} |a - b|, b_2 - a_2 = \frac{1}{2^2} |a - b|, \dots, b_n - a_n = \frac{1}{2^n} |a - b|$$

Axırıncı ifadədən ε dəqiqliklə kökün tapılması üçün iterasiyaların sayı tapıla bilər.

$$|a_n - b_n| \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2^n} |a - b| \leq \varepsilon \Rightarrow 2^n \geq \frac{|a - b|}{\varepsilon} \Rightarrow n \geq INT \left(\frac{\ln |a - b| - \ln \varepsilon}{\ln 2} \right) + 1$$

Parametrin $\lambda \neq 1, \lambda > 0$ qiymətlərində iterasiyaların sayını müəyyən etmək olmur. Parçanın

yarıya bölünməsi üsulu ilə ε dəqiqliklə təqribi kökün tapılması üçün hesabat blok sxemi aşağıda verilmişdir (şəkil 3.12).



Şəkil 3.12

§3.1. misal 1-də $x \sin(x) - 1 = 0$ tənliyinin köklərinin ayrılmasına baxdıq. Bu köklərdən biri $[0.8, 1.3]$ parçasında yerləşir. Tənliyin bu parçada yerləşən kökünü 0.001 dəqiqliklə tapmaq. Mathcad sistemində tərtib olunmuş hesabat blokunda iterasiyaların sayı və hər bir iterasiyada, parçanın uclarında və orta nöqtəsində $x \sin(x) - 1$ ifadəsinin qiyməti, tənliyin kökünün yerləşdiyi parçanın uzunluğu əks olunmuşdur. 9-cu iterasiyada parçanın uzunluğu tələb olunan dəqiqlikdən kiçik olduğundan $[1.1134766, 1.1144531]$ parçasında yerləşən hər bir ədəd tənliyin tələb olunan dəqiqliklə köküdür.

$$f(x) := x \cdot \sin(x) - 1 \quad a := 0.8 \quad b := 1.3 \quad \varepsilon := 0.001$$

$$n := \frac{(\ln(b - a) - \ln(\varepsilon))}{\ln(2)} \quad n = 8.9657843$$

$$f(a) \cdot f(b) = -0.1076476 \quad c := 0.5 \cdot (a + b)$$

1 $f(a) \cdot f(c) = 0.0380119 \quad a := c$

$$a = 1.05 \quad b = 1.3 \quad b - a = 0.25$$

$$f(a) \cdot f(b) = -0.0225356 \quad c := 0.5 \cdot (a + b)$$

2 $f(a) \cdot f(c) = -0.0075076 \quad b := c$

$$a = 1.05 \quad b = 1.175 \quad b - a = 0.125$$

$$f(a) \cdot f(b) = -0.0075076 \quad c := 0.5 \cdot (a + b)$$

3 $f(a) \cdot f(c) = 0.0002053 \quad a := c$

$$a = 1.1125 \quad b = 1.175 \quad b - a = 0.0625$$

$$f(a) \cdot f(b) = -0.0001937 \quad c := 0.5 \cdot (a + b)$$

4 $f(a) \cdot f(c) = -0.0000944 \quad b := c$

$$a = 1.1125 \quad b = 1.14375 \quad b - a = 0.03125$$

$$f(a) \cdot f(b) = -0.0000944 \quad c := 0.5 \cdot (a + b)$$

5 $f(a) \cdot f(c) = -0.0000446 \quad b := c$

$$a = 1.1125 \quad b = 1.128125 \quad b - a = 0.015625$$

$$f(a) \cdot f(b) = -0.0000446 \quad c := 0.5 \cdot (a + b)$$

6 $f(a) \cdot f(c) = -0.0000197 \quad b := c$

$$a = 1.1125 \quad b = 1.1203125 \quad b - a = 0.0078125$$

$$f(a) \cdot f(b) = -0.0000197 \quad c := 0.5 \cdot (a + b)$$

7 $f(a) \cdot f(c) = -0.0000072 \quad b := c$

$$a = 1.1125 \quad b = 1.1164063 \quad b - a = 0.0039063$$

$$f(a) \cdot f(b) = -0.0000072 \quad c := 0.5 \cdot (a + b)$$

8 $f(a) \cdot f(c) = -0.0000009 \quad b := c$

$$a = 1.1125 \quad b = 1.1144531 \quad b - a = 0.0019531$$

$$f(a) \cdot f(b) = -0.0000009 \quad c := 0.5 \cdot (a + b)$$

9 $f(a) \cdot f(c) = 0.0000022 \quad a := c$

$$a = 1.1134766 \quad b = 1.1144531 \quad b - a = 0.0009766$$

$$f(a) = -0.0009452$$

$$f(b) = 0.0004111$$

Tərtib olunmuş hesabat blokundan istifadə edərək tənliyin digər köklərini tələb olunan dəqiqliklə tapmaq olar.

Vətərlər (kəsənlər) üsulu

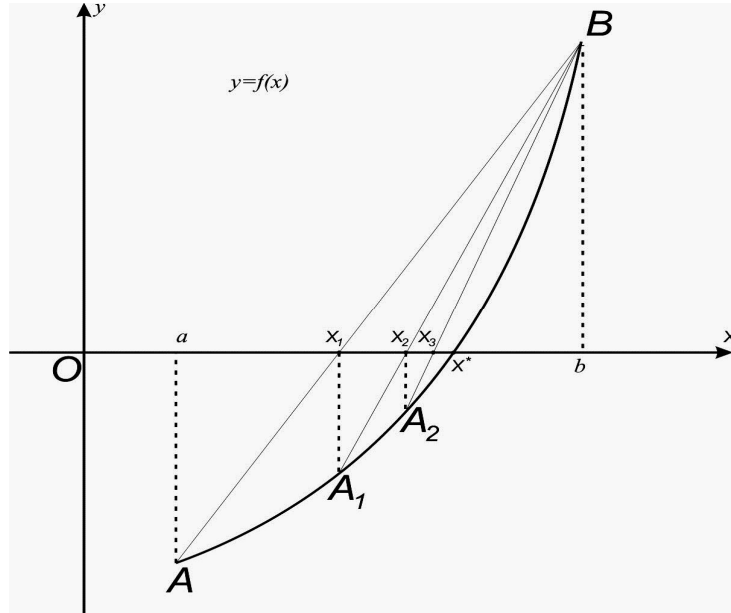
Bəzi ədəbiyyatlarda bu üsul “xətti interpolasiya“, “mütənasib hissələr“ kimi adlarla verilir. Üsulun mahiyyəti (1) tənliyin kökünün ayrıldığı $[a, b]$ parçasında $f(x)$ funksiyasının qrafikinə onu gərən vətərlə əvəz olunması, funksiya qrafikinə ox oxu ilə kəsişmə nöqtəsi əvəzinə, vətərin ox oxu ilə kəsişmə nöqtəsini tapmaqla tənliyin x^* kökünə yaxınlaşmaların qurulmasından ibarətdir. Çəkilən vətər parçanı iki hissəyə bölür. Tənliyin kökünün yerləşdiyi parçanın müəyyən olunmasında funksiyanın birinci və ikinci tərtib törəmələrinin işarəsindən istifadə olunur.

1. $f'(x) * f''(x) > 0$ halına baxaq (şəkil 3.8 və 3.9). $A(a, f(a))$ və $B(b, f(b))$ nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyini yazaq.

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \quad (6)$$

Bu düz xəttin ox oxu ilə kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün (6)-da $y=0$ yazaq. Vətərlə ox oxunun kəsişmə nöqtəsi üçün aşağıdakı düsturu alırıq.

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}$$



Şəkil 3.13

Tənliyin kökü $[x_1, b]$ parçasında yerləşəcək (şəkil 3.13). $A_1(x_1, f(x_1))$ və $B(b, f(b))$ nöqtələrindən keçən düz xəttin ox oxu ilə kəsişmə nöqtəsi x_2 aşağıdakı düsturla tapılır.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

Tənliyin kökü $[x_2, b]$ parçasında yerləşəcək. Bu prosesi davam etdirsək ümumi halda $n + 1$ -ci yaxınlaşma üçün

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)} \quad (7)$$

düsturunu alarıq. Nəticədə bir ucu dəyişməyən $[a, b] \supset [x_1, b] \supset [x_2, b] \supset \dots \supset [x_{n+1}, b]$ parçalar ardıcılığını alarıq. $\{x_n\}$ ardıcılığı monoton artan və yuxarıdan tənliyin x^* kökü

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < x^* < b$$

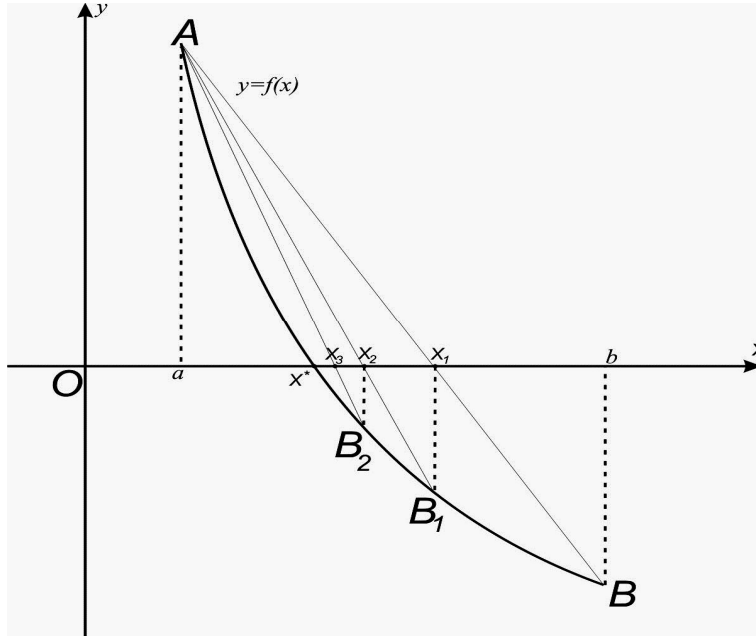
ilə məhdud olduğundan bu ardıcılığın limiti var: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$

2. $f'(x) * f''(x) < 0$ halına baxaq (şəkil 3.10 və 3.11). $A(a, f(a))$ və $B(b, f(b))$ nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyini yazaq.

$$\frac{y - f(b)}{f(a) - f(b)} = \frac{x - b}{a - b}$$

Bu düz xəttin ox oxu ilə kəsişmə nöqtəsini tapaq.

$$x_1 = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}$$



Şəkil 3.14

Tənliyin kökü $[a, x_1]$ parçasında yerləşəcək (şəkil 3.14). Birinci halda olduğu kimi prosesi davam etdirsək ümumi halda n -ci yaxınlaşma üçün

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(a - x_{n-1})}{f(a) - f(x_{n-1})} \quad (8)$$

düsturunu alarıq. Nəticədə bir ucu dəyişməyən $[a, b] \supset [a, x_1] \supset [a, x_2] \supset \dots \supset [a, x_n]$ parçalar ardıcılığını alarıq. $\{x_n\}$ ardıcılığı monoton azalan və aşağıdan tənliyin x^* kökü

$$a < x^* < x_n < \dots < x_3 < x_2 < x_1 < b$$

ilə məhdud olduğundan bu ardıcılığın limiti var: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$

Tənliyin kökünün daxil olduğu parçanın dəyişməyən ucunun (tərpənməz uc, tərpənməz nöqtə) müəyyən olunması ilə hesabat düsturları seçilir. Yuxarıda parçanın dəyişməyən ucunu birinci və ikinci tərtib törəmələrinin işarələrinin eyni olması ilə müəyyən etdik. Daha sadə yolla bu müəyyən oluna bilər. Əgər parçanın b ucunda funksiyanın işarəsi ilə ikinci tərtib törəmənin işarəsi üst-üstə düşərsə, iterasiya prosesində parçanın bu ucu dəyişmir. Bu halda hesabatlar (7) düsturu ilə, əks halda isə (8) düsturu ilə aparılır.

Bu üsuldan tənliyin kökünün ayrıldığı $[a, b]$ parçasında $f'(x)$ funksiyanın ən böyük (M) və ən kiçik (m) qiymətləri arasında $M \leq 2m$ şərti ödəndikdə istifadə olunur. $[a, b]$ parçasında $f''(x)$ funksiyanın işarəsi sabit olduğundan $f'(x)$ funksiyası ən böyük və ən kiçik qiymətini parçanın uclarında alacaqdır. İsbat olunmuşdur ki, $M \leq 2m$ şərti ödəndikdə

$$|x^* - x_n| < |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

şərti ödənilir. Deməli, (7) və ya (8) düsturları ilə hesabatlar apararaq, $\{x_n\}$ ardıcılığının iki ardıcıl həddinin fərqinin mütləq qiyməti tələb olunan ε dəqiqliyindən kiçik olduqda hesabat prosesini saxlamaq olar. Bu zaman n -ci yaxınlaşmanın x_n qiyməti (1) tənliyinin ε dəqiqliklə təqribi köküdür. Vətərlər üsulu ilə təqribi kökün tapılması üçün hesabat blok sxemi şəkil 3.15-də verilmişdir.

Misal. §3.2.1-də $x \sin(x) - 1 = 0$ tənliyinin kökü parçanı yarıya bölmə üsulu ilə dəqiqləşdirildi. Vətərlər üsulu ilə təqribi kökün dəqiqləşdirilməsi üçün parçanı yarıya bölmə üsulunda tələb olunmayan əlavə şərtlər ödənməlidir. Birinci növbədə tənliyin kökünün ayrıldığı elə parça müəyyən olunmalıdır ki, $f(x) = x \sin(x) - 1$ funksiyanın birinci tərtib törəməsinin bu parçada ən kiçik və ən böyük qiymətləri arasında $M \leq 2m$ şərti ödənsin. Belə parça müəyyən olunduqdan sonra parçanın tərpənməz ucu müəyyən olunmalıdır. Mathcad sistemində funksiyanın birinci və ikinci tərtib törəmələri üçün analitik ifadələr tapılmış, onların qrafikləri qurulmuşdur. $[1.113, 1.1142]$ parçasında funksiyanın birinci və ikinci tərtib törəmələri öz işarələrini sabit saxlayır. Deməli, baxılan parçada funksiyanın

birinci tərtib törəməsi monotondur. Onda funksiyanın birinci tərtib törəməsi  n kiçik (m) və  n böyük (M) qiymətini parçanın uclarında alır. Mathcad sistemində tərtib olunmuş hesabat blokunda funksiyanın törəmələrinin analitik ifadələri, baxılan parçanın uclarında funksiyanın v  törəmələrinin qiymətləri verilmişdir.

$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow \sin(x) + x \cdot \cos(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow 2 \cdot \cos(x) - x \cdot \sin(x) \quad f1(x) := \frac{d}{dx}f(x) \quad f2(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

$$x_0 := 1.1142 \quad a = 1.113 \quad b = 1.1142$$

$$f(a) = -0.001607126364 \quad f(b) = 0.000059523051$$

$$f1(a) = 1.388943945211 \quad f1(b) = 1.388804315597$$

$$f2(a) = -0.114448026156 \quad f2(b) = -0.118268180224$$

Bu qiymətlərə görə parçanın a ucunda funksiyanın və ikinci tərtib törəmənin işarəsi üst-üstə d  r. Deməli parçanın a ucu vətərlər üsulunda dəyişməyəcəkdir. Parçanın uclarında birinci tərtib törəmənin qiymətləri $M \leq 2m$  rtini ödəyir. Bu isə vətərlər üsulunda iki ardıcıl iterasiya nəticələrinə görə tələb olunan dəqiqliklə təqribi kökün tapılmasına imkan verir. Mathcad mühitində tərtib olunmuş fragmentdə sıfırncı yaxınlaşma kimi parçanın b ucu götürülmüşdür. Hər bir iterasiyada $f(x)$ funksiyanın qiyməti (t), vətərlər üsulu ilə hesabat (x) və iki ardıcıl iterasiya qiymətlərinin fərqi (y) müəyyən etmək  c n dövr qurulmuşdur.

$$x_0 := 1.1142 \quad a := 1.113 \quad b := 1.1142 \quad f(a) = -0.001607126364$$

$$t_0 := f(x_0) \quad y_0 := x_0 - a \quad f(b) = 0.000059523051$$

$$n := 1..3$$

$$x_n := x_{n-1} - f(x_{n-1}) \cdot \frac{(a - x_{n-1})}{(f(a) - f(x_{n-1}))}$$

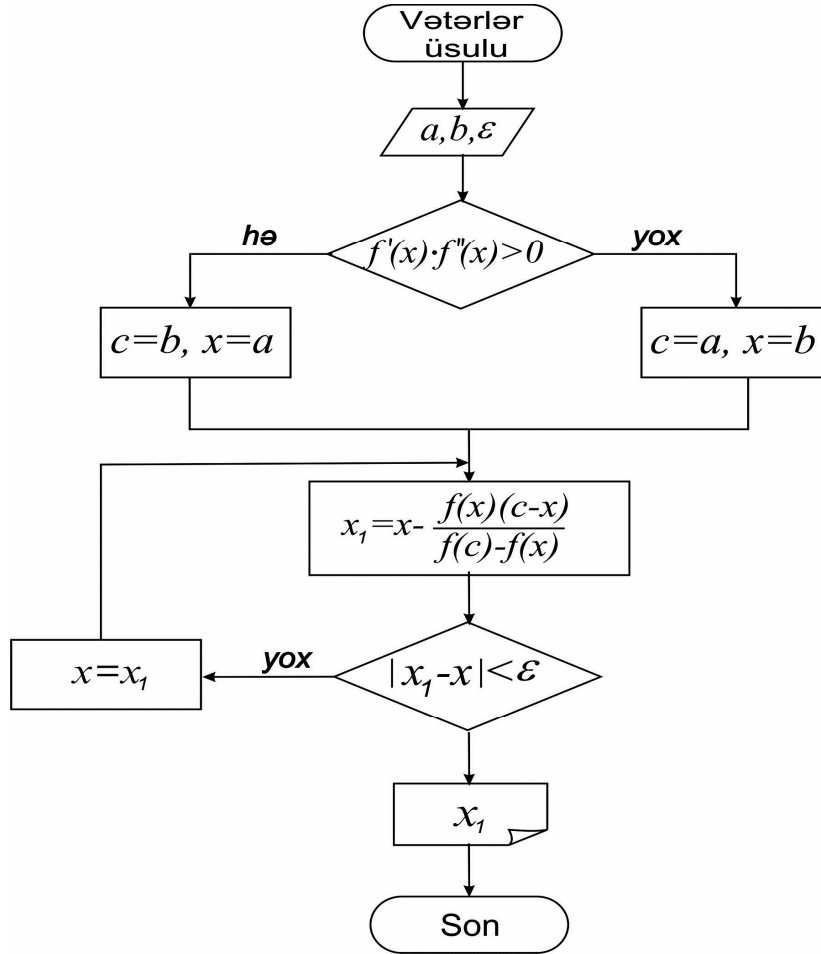
$$t_n := f(x_n)$$

$$y_n := x_n - x_{n-1}$$

$$+$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.1142 \\ 1.11415714296 \\ 1.114157140872 \\ 1.114157140872 \end{pmatrix} \quad t = \begin{pmatrix} 0.000059523051 \\ 0.0000000029 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0.0012 \\ -0.00004285704 \\ -0.000000002088 \\ -0 \end{pmatrix}$$

Alınmış nəticələrdən görünür ki, 2-ci iterasiyada iki ardıcıl təqribi kökün qiymətlər fərqi 0.0000000088-ə bərabərdir. Deməli $x=1.114157140872$ verilən tənliyin 0.00000001 dəqiqliklə təqribi köküdür.



Şəkil 3.15

Toxunanlar (Nyuton) üsulu

Tutaq ki, (1) tənliyinin kökü $[a, b]$ parçasında ayrılmışdır. Bu parçada $f'(x)$ və $f''(x)$ funksiyaları işarələrini sabit saxlamaqla kəsilməzdir. Toxunanlar üsulunun mahiyyəti (1) tənliyinin kökünün ayrıldığı $[a, b]$ parçasında $f(x)$ funksiyasının qrafikinə ona parçanın uclarının birindən çəkilən toxunanla əvəz olunması, funksiya qrafikinə ox oxu ilə kəsişmə nöqtəsi əvəzinə toxunanın ox oxu ilə kəsişmə nöqtəsini tapmaqla, tənliyin x^* kökünə yaxınlaşmaların qurulmasından ibarətdir. Bu toxunan $[a, b]$ parçasını iki hissəyə bölür. Tənliyin kökünün yerləşdiyi parça funksiyanın birinci və ikinci tərtib törəmələrinin işarəsi ilə müəyyən olunur. (1) tənliyinin köklərinin ayrılmasında dörd hala baxmışdıq.

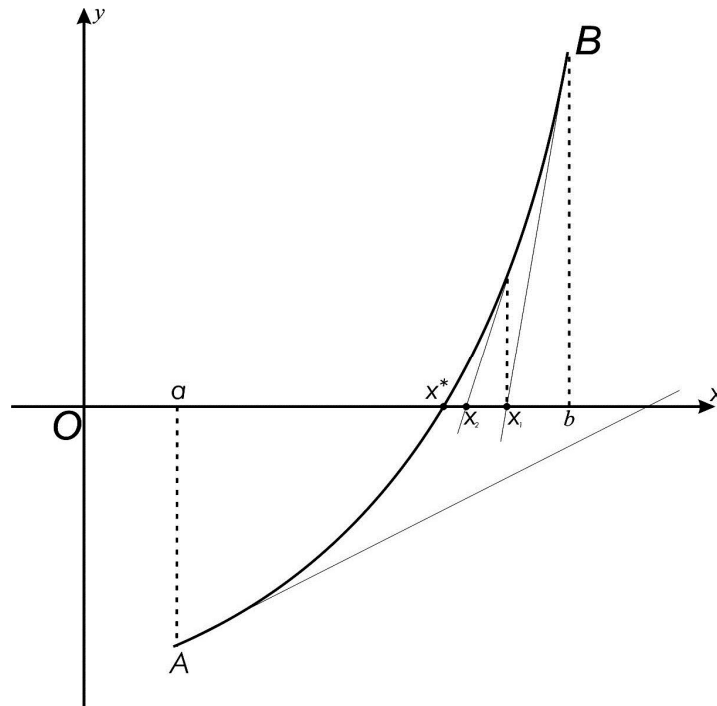
- | | | | |
|----|---|-----|---|
| I. | $f(a) < 0, f(b) > 0$
$f'(x) > 0, f''(x) > 0$ | II. | $f(a) > 0, f(b) < 0$
$f'(x) < 0, f''(x) < 0$ |
|----|---|-----|---|

$$\text{III. } \begin{array}{l} f(a) < 0, f(b) > 0 \\ f'(x) > 0, f''(x) < 0 \end{array} \quad \text{IV. } \begin{array}{l} f(a) > 0, f(b) < 0 \\ f'(x) < 0, f''(x) > 0 \end{array}$$

1-ci və 2-ci hallardan birinə baxmaq kifayətdir. Ona görə ki, 2-ci haldakı şərtləri 1-ci haldakı şərtləri -1-ə vurmaqla almaq olar (şəkil 3.8 və 3.9). Eyni nəticəni 3-cü və 4-cü hallara aid etmək olar. Digər tərəfdən 1-ci və 2-ci hallarda $f'(x) * f''(x) > 0$, 3-cü və 4-cü hallarda isə $f'(x) * f''(x) < 0$ şərtləri ödənilir (Şəkil 3.10 və 3.11).

I. $f'(x) * f''(x) > 0$ şərti ödənen hallardan birincisinə baxaq. Şəkil 3.16-dan görünür ki, $A(a, f(a))$ nöqtəsində çəkilən toxunan $[a, b]$ parçasının daxili nöqtəsində ox oxunu kəsmir. $B(b, f(b))$ nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyanın qrafikinə çəkilən toxunan isə $[a, b]$ parçasının daxili nöqtəsində ox oxunu kəsir. Deməli, $B(b, f(b))$ nöqtəsində çəkilən toxunan $[a, b]$ parçasını iki hissəyə böləcəkdir. Bu nöqtədə toxunanın tənliyini yazmaq və ox oxu ilə kəsişmə nöqtəsini tapmaq.

$$y = f'(b) * (x - b) + f(b), \quad y = 0 \Rightarrow x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \quad (9)$$



Şəkil 3.16

Tənliyin kökü $[a, x_1]$ parçasında yerləşəcək. $B_1(x_1, f(x_1))$ nöqtəsində toxunan çəkək və ox oxu ilə kəsişmə nöqtəsini tapaq

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Bu prosesi davam etdirsək

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

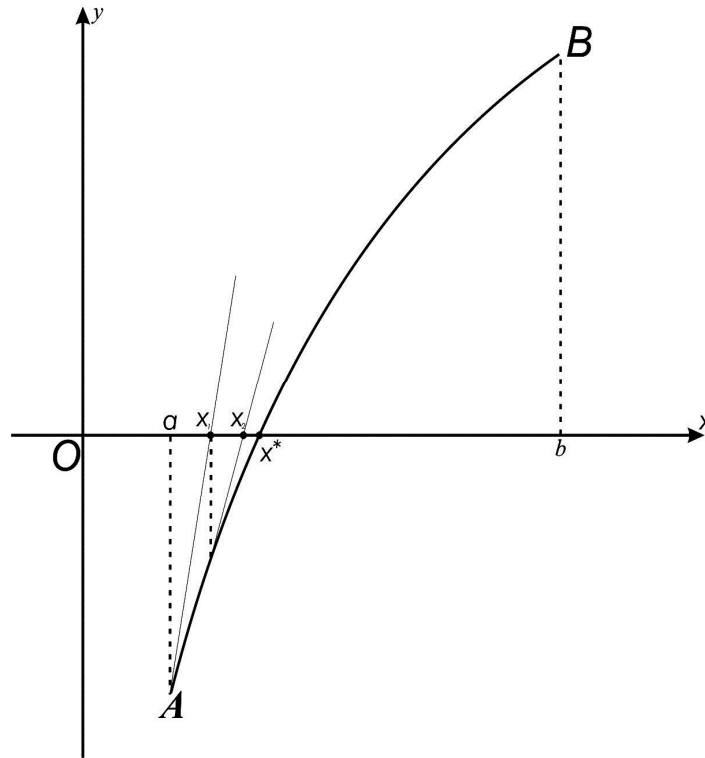
yaxınlaşmalarını alırıq. Bu yaxınlaşmalar tənliyin kökünün yerləşdiyi parçanın bir ucunu müəyyən edir: $[a, x_n]$. Nəticədə $\{x_n\}$ təqribi köklər ardıcılığını alırıq.

$$a < x^* < x_n < \dots < x_3 < x_2 < x_1 < b$$

Bu ardıcılıq monoton azalan və aşağıdan tənliyin x^* kökü ilə məhdud olduğundan onun limiti var: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

II. I $f'(x) * f''(x) < 0$ şərti ödənən hallardan birincisinə baxaq. Şəkil 3.17-dən görünür ki, $B(b, f(b))$ nöqtəsində çəkilən toxunan $[a, b]$ parçasının daxili nöqtəsində ox oxunu kəsmir. $A(a, f(a))$ nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinə çəkilən toxunan isə $[a, b]$ parçasının daxili nöqtəsində ox oxunu kəsir. Deməli, $A(a, f(a))$ nöqtəsində çəkilən toxunan $[a, b]$ parçasını iki hissəyə böləcəkdir. Bu nöqtədə toxunanın tənliyini yazaq və ox ilə kəsişmə nöqtəsini tapaq.

$$y = f'(a) * (x - a) + f(a) \quad y = 0 \Rightarrow x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad (10)$$



Şəkil 3.17

Tənliyin kökü $[x_1, b]$ parçasında yerləşəcək. $A_1(x_1, f(x_1))$ nöqtəsində toxunan çəkkək

və ox oxu ilə kəsişmə nöqtəsini tapmaq.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Bu prosesi davam etdirsək

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (11)$$

yaxınlaşmaları tənliyin x^* kökünün yerləşdiyi $[x_n, b]$ parçasının bir ucunu müəyyən edəcək.

Nəticədə $\{x_n\}$ təqribi

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < x^* < b$$

köklər ardıcılığını alarıq. Bu ardıcılıq monoton artan və yuxarıdan tənliyin x^* kökü ilə məhdud olduğundan onun limiti var: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

Göründüyü kimi vətərlər üsulunda olduğu kimi bu üsulda da tənliyin kökünün daxil olduğu parçanın bir ucu iterasiya prosesində dəyişmir (tərpənməz uc, tərpənməz nöqtə).

Toxunanlar üsulunda parçanın toxunan çəkiləcək ucunun müəyyən olunması ilə hesabat düsturları seçilir. Araşdırılan hallarda parçada funksiyanın birinci və ikinci tərtib törəmələrinin işarələrinin eyni olduğu ucda toxunan çəkdik. Bu başqa yolla da müəyyən oluna bilər. Əgər parçanın ucunda funksiyanın işarəsi ilə ikinci tərtib törəmənin işarəsi üst-üstə düşərsə parçanın bu ucunda funksiya qrafikinə toxunan çəkilməlidir. İterasiya prosesində isə tənliyin kökünün yerləşdiyi parçanın digər ucu dəyişməyəcəkdir. Deməli $f(a) * f''(x) > 0$ olduqda tənliyin dəqiq kökünə birinci yaxınlaşma (10) düsturu ilə, $f(b) * f''(x) > 0$ olduqda isə birinci yaxınlaşma (9) düsturu ilə hesablanmalı və sonrakı iterasiyalar (11) düsturu ilə aparılmalıdır. İterasiya prosesində xətanın qiymətləndirilməsinə baxaq.

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında diferensiallanandır. Laqranj teoreminə görə $\exists \theta \in [a, b]$ tapmaq olar ki,

$$f(x) - f(x^*) = f'(\theta)(x - x^*)$$

şərti ödənsin. $f(x) \neq 0, f'(\theta) \neq 0$ olduğunu nəzərə alaq.

$$f(x) = f'(\theta)(x - x^*) \Rightarrow x - x^* = \frac{f(x)}{f'(\theta)}$$

$|f'(x)|$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında ən kiçik qiymətini $m = \min|f'(x)|$ işarə edək.

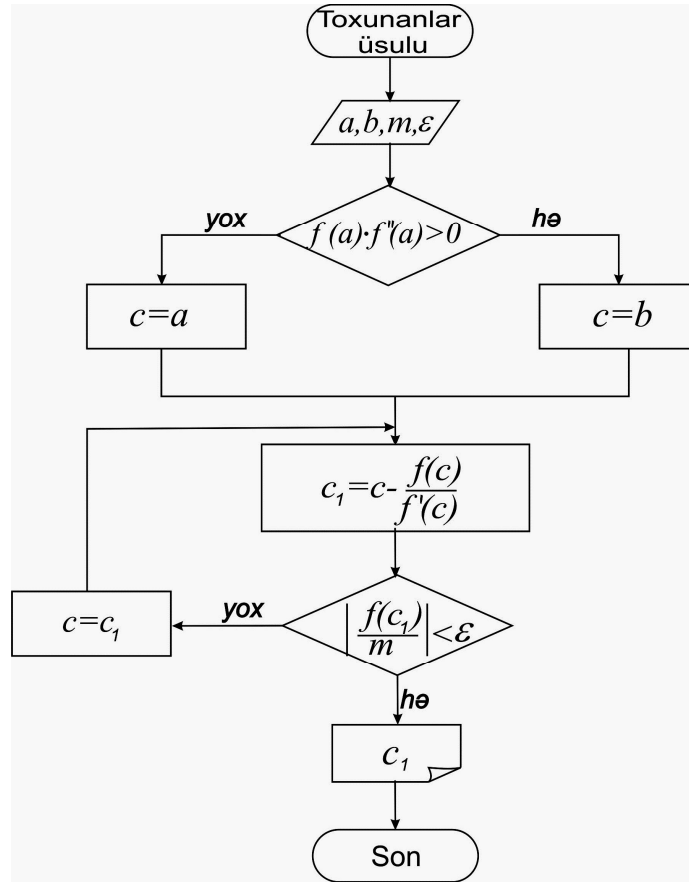
Onda

$$|x - x^*| = \frac{|f(x)|}{|f'(\theta)|} \leq \frac{|f(x)|}{m} \leq \varepsilon$$

şərtini alırıq. Deməli hər bir iterasiyada

$$\frac{|f(x_n)|}{m} \leq \varepsilon \quad (12)$$

şərtini yoxlamaqla (1) tənliyinin ε dəqiqliklə x_n təqribi kökünü tapa bilərik. Vətərlər üsulunda olduğu kimi (12) şərtindən $[a, b]$ parçasında $f'(x)$ funksiyasının ən böyük (M) və ən kiçik (m) qiymətləri arasında $M \leq 2m$ şərti ödəndikdə istifadə olunur. Toxunanlar üsulu ilə hesab blok sxemini tərtib edək (şəkil 3.18).



Şəkil

§3.2.2-də həll edilmiş misalı toxunanlar üsulu ilə həll edək. [1.113, 1.1142] parçasının $a = 1.113$ ucu tərərnməz olduğundan bu uca funksiya qrafikinə toxunan çəkək və sıfırıncı yaxınlaşma kimi $x_0 = 1.113$ götürək. Mathcad sistemində toxunanlar üsulu ilə həll üçün hesab bloku aşağıda verilmişdir. Hər bir iterasiyada tənliyin təqribi kökü, funksiyanın qiyməti və iki ardıcıl iterasiya nəticələrinin fərqi sütun vektoru şəkilində əks olunmuşdur.

Mathcad Профессиональная версия - [toxunan.mcd]

Файл Правка Просмотр Вставка Форматирование Математика Символика Окно Помощь

Normal Arial 10 B I U

$a := 1.113$ $b := 1.1142$ $x_0 := 1.113$ $t_0 := f(x_0)$
 $f(a) = -0.0016071263643$ $f(b) = 0.00005952305061$
 $f1(a) = 1.38894394521081$ $f1(b) = 1.38880431559739$
 $f2(a) = -0.11444802615609$ $f2(b) = -0.11826818022434$
 $n := 1..3$

$$x_n := x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f1(x_{n-1})}$$

$$t_n := f(x_n) \quad y_n := x_n - x_{n-1}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.113 \\ 1.1141570851148 \\ 1.11415714087193 \\ 1.11415714087193 \end{pmatrix} \quad t = \begin{pmatrix} -0.0016071263643 \\ -0.00000007743603 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0011570851148 \\ 0.00000005575713 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alınmış nəticələrdən görünür ki, 2-ci iterasiyada iki ardıcıl təqribi kökün qiymətlər fərqi 0.0000000557-ə bərabərdir. Deməli, $x=1.11415714087193$ verilən tənliyin 0.00000001 dəqiqliklə təqribi köküdür. Tərtib olunmuş hesabat bloklarından istifadə edərək müxtəlif misalları toxunanlar üsulu ilə həll etmək olar.

Vətərlər və toxunanlar üsullarının kombinasiyası

Bu üsul bəzi ədəbiyyatlarda qarışıq üsul adı ilə verilir. Vətərlər və toxunanlar üsullarında təqribi kökün xətasının qiymətləndirilməsi üçün elə parça tələb olunur ki, funksiyanın birinci tərtib törəməsinin tənliyin kökünün ayrıldığı parçada ən böyük (M) və ən kiçik (m) qiymətləri arasında $M \leq 2m$ şərti ödənsin. Bu isə vətərlər və toxunanlar üsulunun tətbiqi üçün əvvəlcədən müxtəlif üsullarla parçanın müəyyən olunmasını tələb edir və müəyyən çətinliklər yaradır. Ona görə də praktikada bu üsulların hər ikisinə əsaslanan kombinə üsulundan istifadə edirlər. Bu üsulda təqribi kökün qiymətləndirilməsi parçanın yarıya bölünməsi üsulunda olduğu kimi tənliyin x^* kökünün yerləşdiyi parçanın uzunluğu ilə müəyyən olunur. Bu üsulun mahiyyəti tənliyin kökünün ayrıldığı parçada x^* kökünə bir tərəfdən vətərlər, digər tərəfdən isə toxunanlar üsuluna əsaslanaraq iterasiyaların qurulması ilə tənliyin kökünün yerləşdiyi parçanın uzunluğunun tələb olunan ε dəqiqliyindən kiçik olana qədər davam etdirilməsindən ibarətdir. Vətərlər və toxunanlar üsullarında olduğu kimi bu üsuldada iki hala baxacağıq.

Tutaq ki, (1) tənliyinin kökü $[a, b]$ parçasında ayrılmışdır (şəkil 3.17).

1-ci hal. $f'(x) * f''(x) < 0$ şərtləri ödənilir (şəkil 3.10 və 3.11). Birinci iterasiyada parçanın a_1 ucu toxunanlar üsulu ilə, b_1 ucu isə vətərlər üsulu ilə müəyyən olunmalıdır (şəkil 3.19).

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$b_1 = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

Ümumi halda isə aşağıdakı düsturlarla iterasiyalar aparılır.

$$a_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})}$$

$$b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})(a - b_{n-1})}{f(a) - f(b_{n-1})}$$

$$n = 2, 3, 4, \dots$$

2-ci hal. $f'(x) * f''(x) > 0$ (şəkil 3.8 və 3.9). Bu halda birinci iterasiyada tənliyin kökünün yerləşdiyi parçanın a_1 ucu vətərlər, b_1 ucu isə üsulu toxunanlar üsulu ilə müəyyən olunmalıdır (şəkil 3.20).

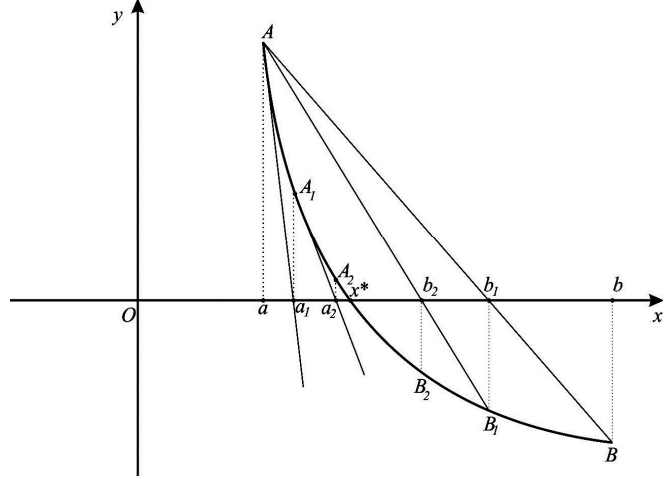
$$a_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

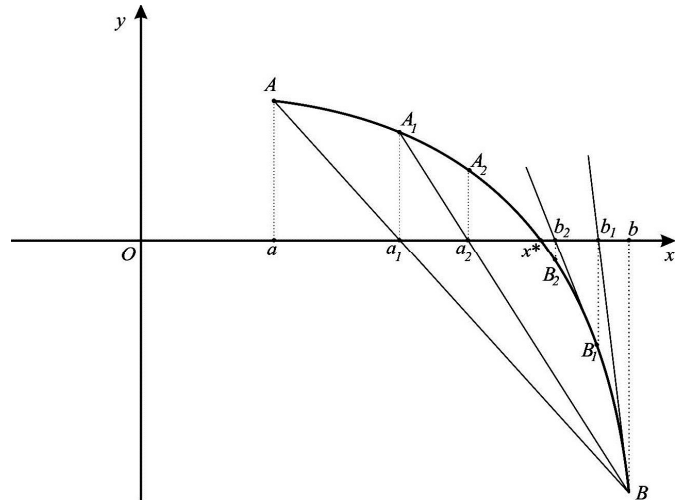
Ümumi halda isə aşağıdakı düsturlarla iterasiyalar aparılır.

$$a_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})(b - a_{n-1})}{f(b) - f(a_{n-1})}$$

$$b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})} \quad n = 2, 3, 4, \dots$$



Şəkil 3.19

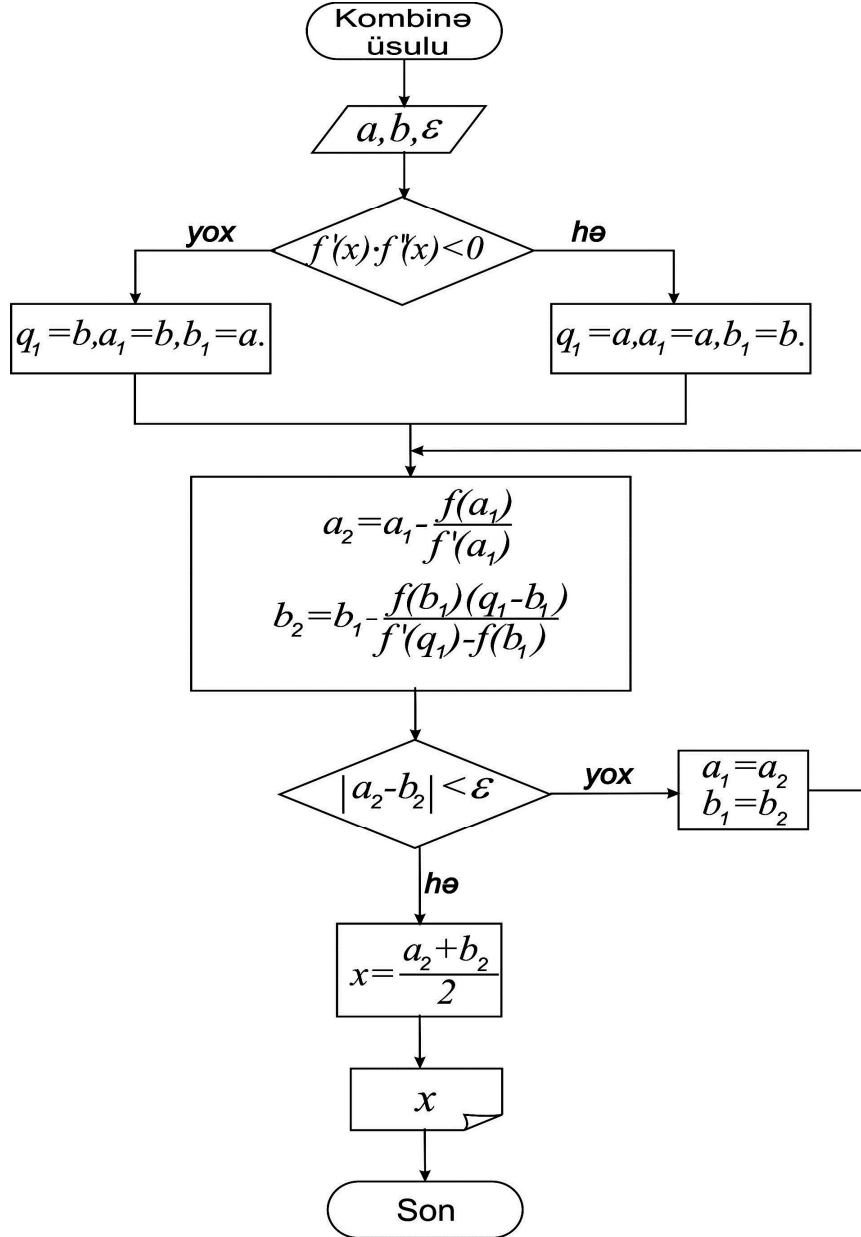


Şəkil 3.20.

Tənliyin x^* kökü n -ci yaxınlaşmada $[a_n, b_n]$ parçasında yerləşəcəkdir. $|a_n - b_n| \leq \varepsilon$ şərti ödəndikdə $\forall x \in [a_n, b_n]$ qiyməti (1) tənliyinin ε dəqiqliklə təqribi köküdür. Praktikada (1) tənliyinin ε dəqiqliklə təqribi kökü kimi

$$x = \frac{a_n + b_n}{2}$$

götürülür. Kombinə üsulunun hesabət blok sxemini şəkil 3.21-də verilmişdir.



Şəkil 3.21

§3.2.2 və §3.2.3-də Mathcad sistemində tərtib olunmuş hesabət bloklarını birləşdirsək, tənliyin kombinə üsulu ilə təqribi kökünün tələb olunan dəqiqliklə tapılmasını yerinə yetirə bilərik.

4-cü mövzu İterasiya üsulu

Bu üsul tətbiq sahələrinə görə əvvəlki üsullardan daha genişdir. Bu üsuldən qeyri-xətti tənliklərin, xətti və qeyri-xətti tənliklər sisteminin, diferensial və inteqral tənliklərin

həllində istifadə olunur. Vətərlər və toxunanlar üsulları da iterasiya üsullarıdır. Bu üsulun mahiyyəti kökü $[a, b]$ parçasında ayrılmış (1) tənliyini

$$x = \varphi(x) \quad (13)$$

kanonik şəkilinə gətirmək, (1) tənliyinin əvəzinə (13) tənliyindən istifadə edərək, qeyd olunmuş $x_1 \in [a, b]$ birinci yaxınlaşmasına görə $x_2 = \varphi(x_1)$ yaxınlaşmasını, ümumi halda isə (1) eləcədə (13) tənliyin kökünə yığılan

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (14)$$

ardıcılığının qurulmasından ibarətdir. Kəsənlər üsulunda (8) düsturunda

$$\varphi(x_{n-1}) = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(a - x_{n-1})}{f(a) - f(x_{n-1})} \quad (15)$$

əvəzləməsi aparsaq (14) düsturunu alarıq. Eləcədə toxunanlar üsulunda (11) düsturunda

$$\varphi(x_{n-1}) = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (16)$$

əvəzləməsi aparsaq, (14) düsturunu alarıq. $\varphi(x)$ funksiyası (15) və (16) düsturları ilə müəyyən olunduqda (14) münasibəti ilə müəyyən olunan $\{x_n\}$ ardıcılığı monoton (artan və ya azalan), məhdud (yuxarıdan və ya aşağıdan) olduğundan yığılandır. Bu ardıcılığın limiti (1) eləcədə (13) tənliyinin köküdür. (1) tənliyini müxtəlif yollarla (13) tənliyinə gətirmək olar. Məsələn,

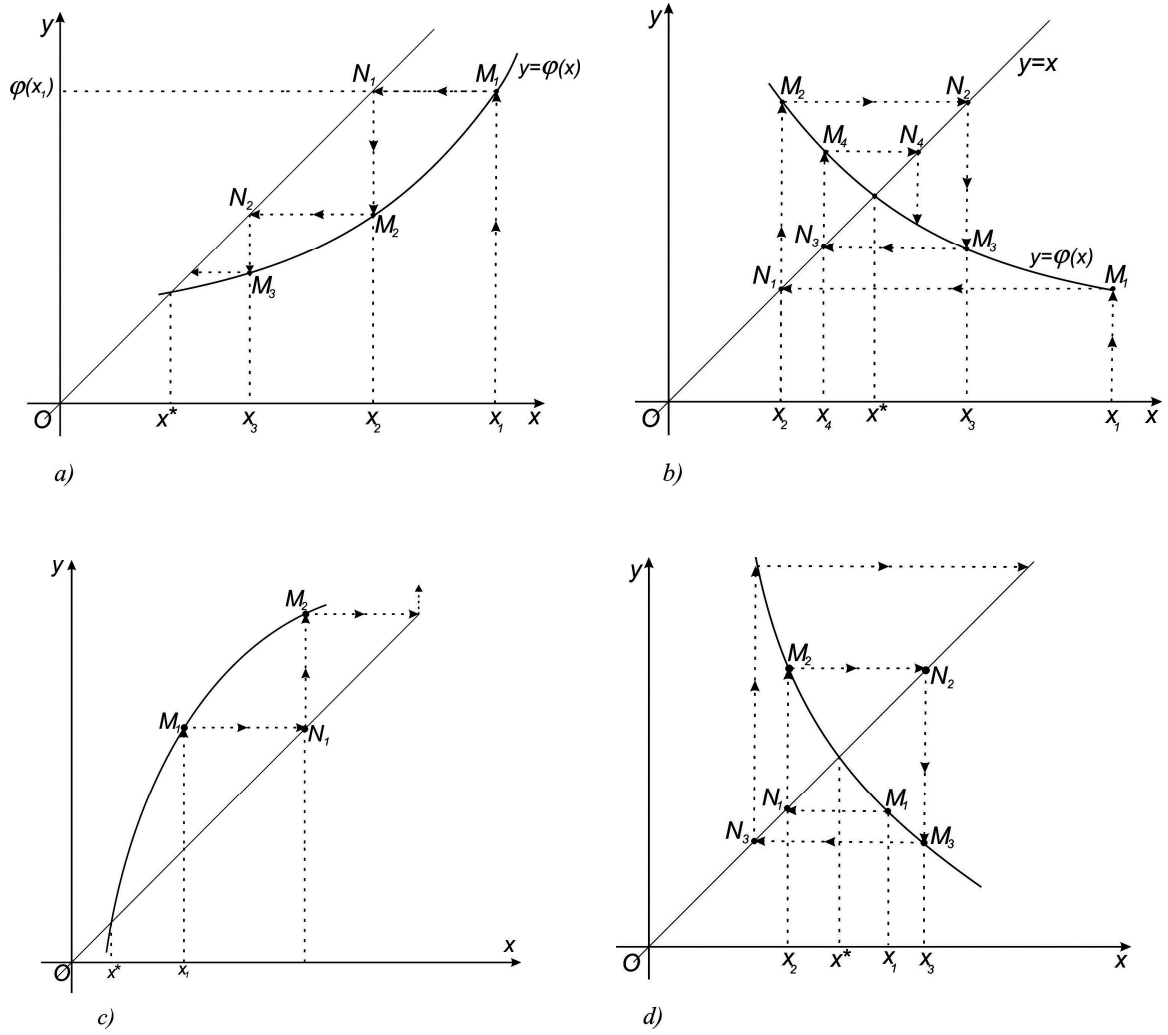
$$x^3 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{x^3 + 1}{3} = \varphi_1(x) \quad \text{və ya} \quad x = \sqrt[3]{3x - 1} = \varphi_2(x)$$

Buradan belə bir sual çıxır. (14) münasibəti ilə müəyyən olunan ardıcılığın yığılan olması $\varphi(x)$ funksiyasından asılıdır mı? Bu ardıcılığın limiti (13) tənliyini ödəyəcək mi?

(14) münasibətinin hər tərəfinin $n \rightarrow \infty$ şərti ilə limitini tapmaq və $\varphi(x)$ funksiyasının kəslməz olduğunu nəzərə alaraq:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n-1}) \Rightarrow x^* = \varphi(x^*)$$

Deməli (14) münasibəti ilə müəyyən olunan ardıcılığın limiti (13) eləcədə (1) tənliyini ödəyəcəkdir. $\{x_n\}$ ardıcılığının $\varphi(x)$ funksiyasından asılı olaraq yığılan və ya dağılan olmasını müəyyən etmək üçün iterasiya üsulunun həndəsi mənasını aydınlaşdıraq. Aydındır ki, (1) eləcədə (13) tənliyinin x^* kökü $y = x$ və $y = \varphi(x)$ funksiyalarının qrafiklərinin kəsişmə nöqtələrinin absisidir (şəkil 3.22 a, b, c, d).



Şəkil 3.22.

Tənliyin kökünün ayrıldığı $[a, b]$ parçasında x_1 birinci yaxınlaşmanı götürüb, $y = \varphi(x)$ funksiyasının qrafiki üzərində $M_1(x_1, \varphi(x_1))$ nöqtəsini qeyd edək (şəkil 3.22 a, b, c, d). Bu nöqtədən ox oxuna paralel düz xətt çəksək, $y = x$ düz xətti ilə kəsişmə nöqtəsinin koordinatları $N_1(\varphi(x_1), \varphi(x_1))$ olar. $x_2 = \varphi(x_1)$ işarələməsi aparıb, $N_1(x_2, x_2)$ nöqtəsindən şaquli düz xətt çəksək, bu düz xəttin $y = \varphi(x)$ funksiyasının qrafiki ilə kəsişmə nöqtəsinin koordinatları $M_2(x_2, \varphi(x_2))$ olar. Yenə də $M_2(x_2, \varphi(x_2))$ nöqtəsindən ox oxuna paralel düz xətt çəksək, $y = x$ düz xətti ilə kəsişmə nöqtəsinin koordinatları $N_2(\varphi(x_2), \varphi(x_2))$ olar. $x_3 = \varphi(x_2)$ işarələməsi aparıb, $N_2(x_3, x_3)$ nöqtəsindən şaquli düz xətt çəkib $y = \varphi(x)$ funksiyasının qrafiki ilə kəsişmə nöqtəsinin $M_3(x_3, \varphi(x_3))$ tapı bilərik. Bu qayda ilə prosesi davam etdirsək, $y = \varphi(x)$ funksiyasının qrafiki üzərində absisləri uyğun olaraq $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ olan $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$ nöqtələr ardıcılığını alarıq. Beləliklə

(şəkil 3.22 *a,b*) tərələri növbə ilə gah $y = \varphi(x)$, gahda $y = x$ funksiyalarının qrafikləri üzərində yerləşən, tərəfləri isə üfqi və ya şaquli olan sınıq xəttin absisləri $x_i, (i=1,2,3,...)$ olan tərə nöqtələri ilə (13) tənliyinin x^* kökünə yaxınlaşmanı alırıq. Baxılan halda (şəkil 3.22 *a,b*) $\{x_n\}$ ardıcılığı yığılandır. Şəkil 3.22 *c,d* hallarında isə əksinə, absisləri $x_i, (i=1,2,3,...)$ olan tərə nöqtələri ilə (13) tənliyinin x^* kökündən uzaqlaşmanı alırıq. Bu halda (şəkil 3.22 *c,d*) $\{x_n\}$ ardıcılığı dağılıdır. Şəkil 3.22 *a,c* hallarında sınıq xətt pilləvari, Şəkil 3.22 *b,d* hallarında isə spiralvari adlanır. Bu deyilənlər iterasiya üsulunun həndəsi mənasıdır. Buradan görünür ki, $x_n = \varphi(x_{n-1})$ düsturu ilə alınan $\{x_n\}$ ardıcılığının yığılan və ya dağılan olması $y = \varphi(x)$ funksiyasından asılıdır. Baxılan hallarda $\{x_n\}$ ardıcılığı haqqında mülahizəni $y = \varphi(x)$ funksiyasının sxematik qurulmuş qrafikinə görə müəyyən etdik. Praktikada $y = \varphi(x)$ funksiyasının qrafikinə görə $x_n = \varphi(x_{n-1})$ ardıcılığının yığılan olmasını müəyyən etmək məqsədəuyğun deyil və əksər hallarda başqa üsullardan istifadə olunur.

Sıxan inikas

Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında kəsilməz olan $y = \varphi(x)$ funksiyası verilmişdir. Bu parçadan götürülmüş ixtiyari x_0 nöqtəsinə ordinat oxunda $y_0 = \varphi(x_0)$ nöqtəsi uyğundur və y_0 nöqtəsi x_0 nöqtəsinin obrazı adlanır. İsbat etmək olar ki, $y = \varphi(x)$ funksiyası kəsilməz olduqda $[a,b]$ parçasının obrazı da parçadır. $y = \varphi(x)$ monoton artan olduqda, $[a,b]$ parçasının obrazı $[\varphi(a), \varphi(b)]$, monoton azalan olduqda isə $[\varphi(b), \varphi(a)]$ parçası olar. Ola bilər ki, $[a,b]$ parçasının obrazı olan $[a_1, b_1]$ parçası, $[a,b]$ parçasının bir hissəsi olsun. Məsələn, $y = \sqrt[3]{x} + 1$ funksiyası $[1,8]$ parçasını $[2,3]$ parçasına inikas edir. $[2,3] \subset [1,8]$.

Aydındır ki, $y = \varphi(x)$ funksiyası $[a_1, b_1]$ parçasını onun bir hissəsi olan $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ parçasına inikas etdirəcəkdir. Bu prosesi davam etdirsək

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots \quad (17)$$

parçalar ardıcılığını alırıq. Burada hər bir $[a_i, b_i]$ parçası $[a_{i-1}, b_{i-1}]$ parçasının $y = \varphi(x)$ funksiyası ilə inikasıdır. Bu prosesi sonsuz davam etdirdikdə, ya bütün $[a_n, b_n]$ parçalarında

yerləşən $[a^*, b^*]$ parçasını, ya da bütün parçaların ortaq nöqtəsi olan x^* nöqtəsini alırıq. Sonuncu halda $[a_n, b_n]$ parçalar sisteminin x^* nöqtəsinə çevrilməsini izah etmək üçün sıxan inikas anlayışını verək. Əgər $\varphi(x)$ funksiyası ilə inikas zamanı iki nöqtə arasında məsafə m ($m > 1$) dəfə kiçilərsə, onda bu inikas sıxan inikas adlanır. Yəni elə bir q ($0 < q < 1$) ədədi tapmaq mümkündür ki, $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ üçün $c = \varphi(x_1), d = \varphi(x_2)$ olduqda

$$|c - d| = |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq q|x_1 - x_2| \Rightarrow [c, d] \subset [x_1, x_2] \quad (18)$$

şerti ödənsin, onda deyirlər ki, $y = \varphi(x)$ funksiyası ilə yerinə yitirilən inikas sıxan inikasdır. Bu deyilənləri nəzərə alsaq, $\varphi(x)$ inikası ilə alınan (17) parçalar sistemi üçün aşağıdakı qiymətləndirməni apara bilərik.

$$|a_n - b_n| \leq q|a_{n-1} - b_{n-1}| \leq q^2|a_{n-2} - b_{n-2}| \leq \dots \leq q^n|a - b|$$

$0 < q < 1$ olduğunu nəzərə alsaq $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ olar.

Bu isə o deməkdir ki, $[a_n, b_n]$ parçalarının uzunluğu $n \rightarrow \infty$ olduqda sifıra bərabər olur, yəni parça nöqtəyə çevrilir. Bu nöqtə tərpənməz nöqtə adlanır.

Teorem. Tutaq ki, $y = \varphi(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməz və diferensiallanandır və parçada $\forall x \in [a, b]$ üçün

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad (19)$$

şerti ödənilir. Onda $[a, b]$ parçasının $y = \varphi(x)$ funksiyası ilə inikası sıxandır.

İsbatı. Laqranj teoreminə görə $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ üçün $\exists c \in [a, b]$ tapmaq olar ki,

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = \varphi'(c)|x_2 - x_1|$$

şerti ödənilir. (19) –a görə $|\varphi'(x)| \leq q < 1 \Rightarrow |\varphi'(c)| \leq q < 1$ olduğunu nəzərə alsaq (18) şərtini alırıq. Deməli $y = \varphi(x)$ funksiyası ilə yerinə yitirilən inikas sıxan inikasdır.

Teorem isbat olundu.

İterasiya üsulunun yığılması

Teorem. Tutaq ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir.

1. $y = \varphi(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməz və diferensiallanandır.
2. $\forall x \in [a, b]$ üçün elə bir q ($0 < q < 1$) ədədi var ki, $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ şərti ödənilir.
3. $x_n = \varphi(x_{n-1})$ ardıcılığının bütün hədləri $[a, b]$ parçasında yerləşir.

Onda $\forall x_0 \in [a, b]$ başlanğıc yaxınlaşması üçün $\{x_n\}$ ardıcılığının limiti var və bu limit (13) tənliyinin köküdür.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^* \quad \text{və} \quad x^* = \varphi(x^*)$$

İsbatı. Teoremin 1 və 2 şərtlərindən görünür ki, $y = \varphi(x)$ funksiyası sıxan inikasdır.

Teoremin şərtlərini nəzərə alıb, $\{x_n\}$ ardıcılığının iki həddinin fərqi qiymətləndirək:

$$\begin{aligned} |x_{n+k} - x_n| &= |\varphi(x_{n+k-1}) - \varphi(x_{n-1})| \leq q|x_{n+k-1} - x_{n-1}| = q|\varphi(x_{n+k-2}) - \varphi(x_{n-2})| \leq \\ &\leq q^2|x_{n+k-2} - x_{n-2}| \leq \dots \leq q^n|x_k - x_0| \leq q^n[|x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| + \dots + |x_k - x_{k-1}|] \leq \\ &\leq q^n[|x_1 - x_0| + q|x_1 - x_0| + q^2|x_1 - x_0| + \dots + q^{k-2}|x_1 - x_0|] = \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \end{aligned}$$

Nəticədə

$$|x_{n+k} - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \quad (20)$$

bərabərsizliyini alarıq. Deməli $\forall x_0 \in [a, b]$ üçün $|x_1 - x_0|$ fərqi sonlu, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ olduğunu nəzərə alsaq $\{x_n\}$ ardıcılığı fundamentaldır və onun limiti var.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

Tutaq ki, (13) tənliyinin iki kökü var. x^*, y^* onda

$$|x^* - y^*| = |\varphi(x^*) - \varphi(y^*)| \leq q|x^* - y^*|$$

şərtində $q < 1$ olduğunu nəzərə alsaq $x^* = y^*$ olar. Deməli (13) tənliyinin kökü yeganədir.

Beləliklə (13) tənliyinin x^* kökünün tapılması məsələsi, $\varphi(x)$ inikasının x^* tərənmez nöqtəsinin tapılmasına gətirilir.

İterasiya üsulundan istifadənin ümumi sxemi

Bilirik ki, (1) tənliyini müxtəlif üsullarla (13) tənliyinə, yəni kanonik şəklə gətirilə bilər. İterasiya üsulundan istifadə üçün (19) şərti ödənməlidir. $\varphi(x)$ funksiyasının seçilməsinə baxaq.

$$f(x) = 0 \Rightarrow -\lambda * f(x) = 0 \Rightarrow x = x - \lambda * f(x) \Rightarrow \varphi(x) = x - \lambda * f(x)$$

λ parametrini elə seçək ki, (19) şərti ödənsin.

$\varphi'(x) = 1 - \lambda * f'(x)$ olduğundan (19) şərtinə görə

$$|\varphi'(x)| \leq q \Rightarrow -q \leq \varphi'(x) \leq q \Rightarrow -q \leq 1 - \lambda * f'(x) \leq q \quad (21)$$

Fərz edək ki, $[a, b]$ parçasında (1) tənliyinin kökü ayrılmışdır. Bu parçada $f'(x)$ kəsilməz olmaqla işarəsini sabit saxlayır ($f'(x) > 0$). $[a, b]$ parçasında $f'(x)$ funksiyasının ən böyük və ən kiçik qiymətini M və m işarə edib, $1 - \lambda * f'(x)$ ifadəsini qiymətləndirək.

$$1 - \lambda M \leq 1 - \lambda * f'(x) \leq 1 - \lambda m \quad (22)$$

(21) və (22) münasibətlərini müqayisə etsək

$$1 - \lambda * M = -q$$

$$1 - \lambda * m = q$$

tənliklər sistemindən λ və q üçün aşağıdakı düsturları alırıq.

$$\lambda = \frac{2}{M + m}, q = \frac{M - m}{M + m}$$

λ parametrinin bu düsturla tapılmış qiymətində $\varphi(x)$ funksiyası (19) şərtini ödəyəcəkdir.

Misal 1. $\sin(x) - x \cos(x) = 0$ tənliyinin $[1.25\pi, 1.75\pi]$ parçasında ayrılmış kökünün iterasiya üsulu ilə tapılması üçün kanonik şəkllə gətirin.

$$f'(x) = x \sin(x)$$

funksiyası $[1.25\pi, 1.75\pi]$ parçasında $f'(x) < 0$ olduğu üçün verilən tənliyin əvəzinə $x \cos(x) - \sin(x) = 0$ tənliyinin həllinə baxaq. Bu halda

$$f'(x) = -x \sin(x) > 0$$

olar.

$$m = \min_{x \in [1.25\pi, 1.75\pi]} f'(x) = \frac{5\pi\sqrt{2}}{8} \quad M = \max_{x \in [1.25\pi, 1.75\pi]} f'(x) = \frac{7\pi\sqrt{2}}{8}$$

qiymətlərini nəzərə alsaq

$$\lambda = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}, \quad q = \frac{1}{6}, \quad \text{olar və } \varphi(x) = x - \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}(x * \cos(x) - \sin(x))$$

funksiyası

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{6} < 1$$

şərtini ödəyər. Bu qayda ilə seçilmiş $\varphi(x)$ funksiyası ilə iterasiyaları qurmaq olar. Mathcad sistemində tənliyin təqribi kökünü tapmaq üçün hesabat bloku tərtib edək. Bunun üçün

əvvəlcə $x = \psi(x)$ tənliyində $\psi(x)$ funksiyası və başlanğıc yaxınlaşma verilməlidir. Tərtib olunmuş hesabat blokunda $\psi(x)$ funksiyası, x_0 başlanğıc yaxınlaşması və hesabat üçün dövr qurulmuşdur. Hesabat nəticələrindən görünür ki, 4.493409465 tənliyin 10^{-7} dəqiqliklə köküdür.

$\pi = 3.1415926536$ $\psi(x) := x - \left(2 \frac{\sqrt{2}}{3\pi}\right) \cdot (x \cdot \cos(x) - \sin(x))$
 $x_0 := 1.3 \cdot \pi$ $i := 1..15$
 $x_i := \psi(x_{i-1})$

	0
0	4.0840704497
1	4.5617000751
2	4.4705073881
3	4.5004972373
4	4.4911529898
5	4.4941216715
6	4.4931840405
7	4.4934807412
8	4.4933869099
9	4.4934165895
10	4.4934072022
11	4.4934101714
12	4.4934092322
13	4.4934095293
14	4.4934094353
15	4.493409465

Misal 2. $\varphi(x) = 1 + 0.5 \arctg(x)$ funksiyasının sıxan inikas olduğunu göstərin.

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = |1 + 0.5 * \arctg(x_2) - 1 - 0.5 * \arctg(x_1)| = 0.5 * |\arctg(x_2) - \arctg(x_1)|$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \arctg(x_2) - \arctg(x_1) = \arctg \frac{x_2 - x_1}{1 + x_1 x_2}$$

və $\arctg(x) < x$ olduğunu nəzərə alsaq

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = 0.5 * \left| \arctg \left(\frac{x_2 - x_1}{1 + x_1 x_2} \right) \right| < 0.5 * \left| \frac{x_2 - x_1}{1 + x_1 x_2} \right| < 0.5 * |x_2 - x_1|$$

Şərtindən $\varphi(x)$ funksiyasının sıxan inikas olduğu alınır. Deməli $x = \varphi(x)$ tənliyini iterasiya üsulu ilə həll etmək olar.

Bir çox hallarda təqribi kökün qiymətləndirilməsində iki ardıcıl iterasiya nəticələrinin fərqi istifadə olunur. Tutaq ki, x^* , $x = \varphi(x)$ tənliyinin köküdür və $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ şərti

ödənir. $f(x) = x - \varphi(x)$ qəbul edək. Aydındır ki, $f(x^*) = x^* - \varphi(x^*) = 0$ olar.
 $f'(x) = 1 - \varphi'(x) \geq 1 - q$

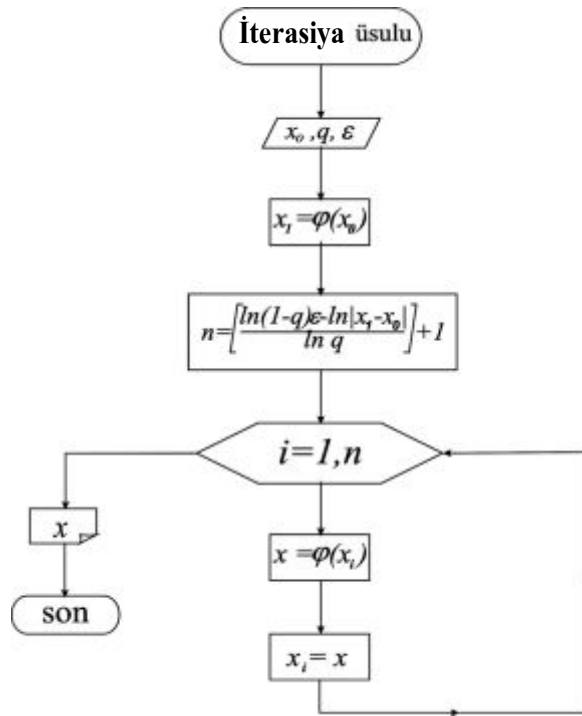
$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |\varphi(x_n) - x_n| = |-f(x_n)| = |f(x^*) - f(x_n)| = \\ &= |f'(c)| * |x^* - x_n| \geq (1 - q) |x^* - x_n| \Rightarrow \\ |x^* - x_n| &\leq \frac{1}{1 - q} |x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{1 - q} |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \Rightarrow \\ |x_n - x^*| &\leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{\varepsilon(1 - q)}{q} \end{aligned} \quad (23)$$

İki ardıcıl iterasiyada (23) şərti ödəndikdə hesabat prosesini saxlamaq olar və $\{x_n\}$ ardıcılığının x_n həddi (13) tənliyinin ε dəqiqliklə təqribi köküdür.

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &\leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \leq \\ &\leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

münasibətindən (23) şərtinin ödəndiyi yaxınlaşmanın sayını tapa bilərik.

$$\begin{aligned} \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon &\Rightarrow q^n \leq \frac{(1 - q)\varepsilon}{|x_1 - x_0|} \Rightarrow \\ \Rightarrow n &= \left\lceil \frac{\ln((1 - q)\varepsilon) - \ln|x_1 - x_0|}{\ln q} \right\rceil + 1 \end{aligned}$$



Şəkil 3.23.

İterasiya üsulu ilə tənliyin tələb olunan dəqiqliklə təqribi kökünün tapılmasının hesabat blok - sxemi şəkil 3.23 də verilmişdir.

Tapşırıq. Aşağıdakı tənliklərin köklərini ayırın və parçanı yarıya bölmə, vətərlər, toxunan-lar, iterasiya üsulları ilə 0.05 dəqiqliklə təqribi kökünü tapın.

1. $x^3 + 3x - 1 = 0$;
2. $x^3 + 2x - 11 = 0$;
3. $x^3 - 2x - 5 = 0$.

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix} \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} \quad \dots X^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$x_i^{(j)}$ ($i=1,2,..n$) j -cu vektorun koordinatlarıdır. Əgər

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i, (i=1,2,\dots,n) \quad \text{yaxud} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = X$$

olarsa, onda X vektoru $X^{(j)}$, ($j=1,2,\dots,k,\dots$) vektorlar ardıcılığının limiti adlanır. Eyni qayda ilə matrislər ardıcılığının limiti anlayışı verilir.

Matrisin norması. A matrisinin mütləq qiyməti (modulu) dedikdə onun elementlərinin mütləq qiymətlərindən tərtib olunmuş matris başa düşülür $|A| = \left[|a_{ij}| \right]$. Matrisin norması həqiqi ədəddir və aşağıdakı şərtləri ödəməlidir.

1. $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| * \|A\|$, α həqiqi ədəddir.
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. $\|A * B\| \leq \|A\| * \|B\|$

3 və 4 bəndlərində fərz edilir ki, A və B matrisləri üzərində toplama və vurma əməlləri aparmaq mümkündür. Matrisin biri birinə ekvivalent olan aşağıdakı normalarından istifadə olunur.

1. $\|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$
2. $\|A\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$
3. $\|A\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$
4. $\|A\|_4 = \sqrt{\lambda}$

Burada λ , $A^T * A$ matrisinin ən böyük məxsusi ədədidir.

Vektorun norması. Vektorun biri-birinə ekvivalent olan aşağıdakı normalarından istifadə olunur.

$$\|X\|_1 = \max_i |x_i| \quad \|X\|_2 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \|X\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Misal.

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \|X\|_1 = 3, \|X\|_2 = 6, \|X\|_3 = \sqrt{14}$$

Xətti tənliklər sisteminin normal şəkli. (1) tənliklər sistemində $a_{ij} \neq 0$ qəbul edib i -ci tənlikdən x_i dəyişənini tapaq.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - 0 * x_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \\ x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - 0 * x_2 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n \\ \dots \\ x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \dots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1} \end{cases}$$

$\frac{b_i}{a_{ii}} = \beta_i \quad - \frac{a_{ij}}{a_{ii}} = \alpha_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$ işarələməsini aparsaq xətti tənliklər sistemini aşağıdakı şəkildə yazı bilərik.

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \quad i, = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Aşağıdakı işarələmələri aparaq və normal şəkilə gətirilmiş xətti tənliklər sistemini matris şəklində yazaq.

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$X = \beta + \alpha * X$$

İterasiya (ardıcıl yaxınlaşma) üsulu

Tutaq ki, (3) və ya (4) normal şəkilə gətirilmiş xətti tənliklər sistemi verilmişdir. Sərbəst hədləri sıfırncı yaxınlaşma qəbul edək və birinci yaxınlaşmanı aşağıdakı kimi tapaq.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ \cdot \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ \cdot \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\dots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\dots\alpha_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\dots\alpha_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ \cdot \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

Birinci yaxınlaşmaya görə ikinci yaxınlaşma tapılır.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ \cdot \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\dots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\dots\alpha_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\dots\alpha_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ \cdot \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

Bu proses

$$X^{(k)} = \beta + \alpha * X^{(k-1)}$$

düsturu ilə davam etdirilir. Nəticədə $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ vektorlar ardıcılığını alırıq. Bu ardıcılığın yığılma şərtinə baxaq. Bunun üçün ardıcılığın ixtiyari iki həddinin fərqini qiymətləndirək.

$$\begin{aligned} \|X^{(m+k)} - X^{(k)}\| &= \|\beta + \alpha * X^{(m+k-1)} - \beta - \alpha * X^{(k-1)}\| \leq \|\alpha\| * \|X^{(m+k-1)} - X^{(k-1)}\| \leq \dots \\ &\leq \|\alpha\|^k * \|X^{(m)} - X^{(0)}\| \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \|X^{(m)} - X^{(0)}\| &\leq \|X^{(1)} - X^{(0)}\| + \|X^{(2)} - X^{(1)}\| + \dots + \|X^{(m)} - X^{(m-1)}\| \leq \\ &\left(\|X^{(1)} - X^{(0)}\| + \|\alpha\| * \|X^{(1)} - X^{(0)}\| + \dots + \|\alpha\|^{m-1} \|X^{(1)} - X^{(0)}\| \right) \leq \\ &\leq \left(1 + \|\alpha\| + \|\alpha\|^2 + \dots + \|\alpha\|^{m-1} \right) \|X^{(1)} - X^{(0)}\| = \frac{\|\alpha\|^{m-1} - 1}{\|\alpha\| - 1} * \|X^{(1)} - X^{(0)}\| \end{aligned}$$

Nəticədə

$$\|X^{(m+k)} - X^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^k (\|\alpha\|^{m-1} - 1)}{\|\alpha\| - 1} * \|X^{(1)} - X^{(0)}\|$$

bərabərsizliyini alırıq.

$$\|X^{(1)} - X^{(0)}\| \text{ normasının sonlu ədəd olduğunu nəzərə alsaq, } \{X^{(i)}\}, (i=1,2,\dots,k)$$

vektorlar ardıcılığının fundamental olması üçün yəni, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|X^{(m+k)} - X^{(k)}\| = 0$ olması üçün

$\|\alpha\| < 1$ şərti ödənməlidir. Bu halda $\{X^{(i)}\}, (i=1,2,\dots,k)$ vektorlar ardıcılığının limiti var və bu limit (3) tənliklər sistemini ödəməlidir.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = X^* \quad X^* = \beta + \alpha * X^*$$

Deməli belə bir nəticəyə gəlirik ki, iterasiya prosesinin yığılan olması üçün normal şəkildə yazılmış xətti tənliklər sisteminin norması vahiddən kiçik olmalıdır.

İterasiya prosesində xətanın qiymətləndirilməsi.

$$\begin{aligned} \|X^{(k)} - X^*\| &= \|\beta + \alpha * X^{(k-1)} - \beta - \alpha * X^*\| \leq \|\alpha\| * \|X^{(k-1)} - X^*\| = \\ \|\alpha\| * \|X^{(k-1)} - X^{(k)} + X^{(k)} - X^*\| &\leq \|\alpha\| * (\|X^{(k-1)} - X^{(k)}\| + \|X^{(k)} - X^*\|) \leq \\ \leq \|\alpha\| * \|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| + \|\alpha\| * \|X^{(k)} - X^*\| &\Rightarrow \\ (1 - \|\alpha\|) \|X^{(k)} - X^*\| &\leq \|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| * \|\alpha\| \Rightarrow \\ \|X^{(k)} - X^*\| &\leq \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^k}{1 - \|\alpha\|} \|X^{(1)} - X^{(0)}\| = \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \|\beta\| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Axırıncı münasibətdən (3) xətti tənliklər sisteminin ε dəqiqliklə təqribi həlli üçün iterasiyanın nömrəsi tapıla bilər.

$$k = \left\lceil \frac{\ln(\varepsilon(1 - \|\alpha\|)) - \ln\|\beta\|}{\ln\|\alpha\|} \right\rceil + 1$$

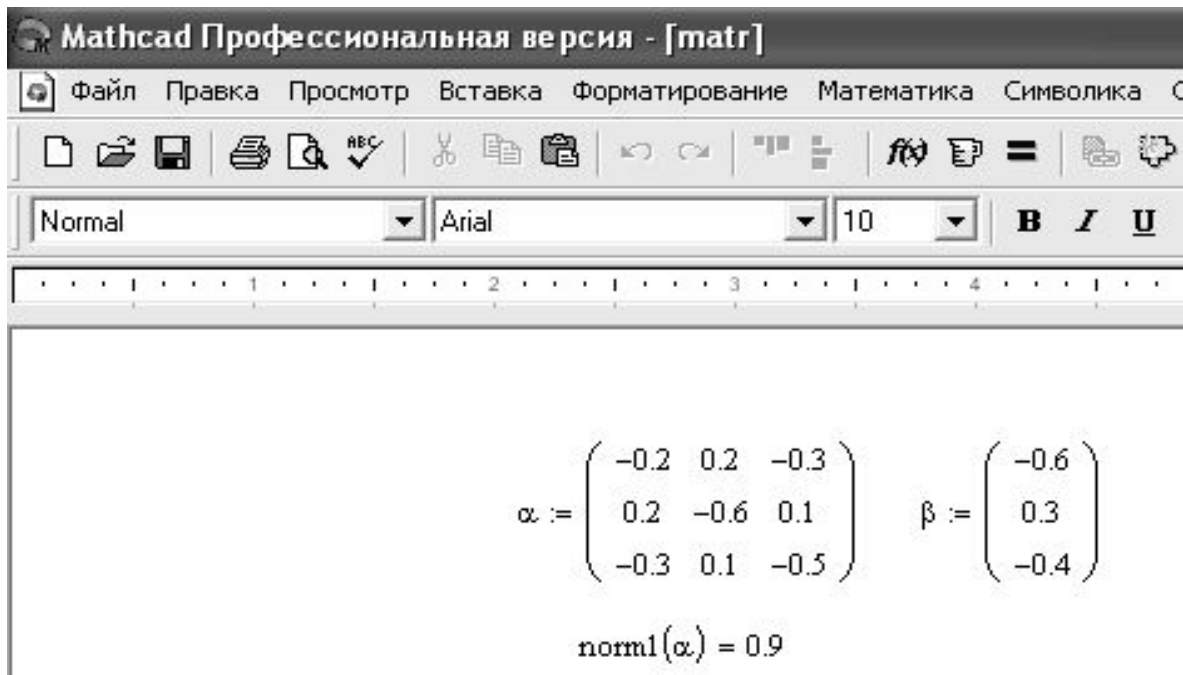
Misal 1. Mathcad sistemində

$$\begin{cases} -1.2x_1 + 0.2x_2 - 0.3x_3 = 0.6 \\ 0.2x_1 - 1.6x_2 + 0.1x_3 = -0.3 \\ -0.3x_1 + 0.1x_2 - 1.5x_3 = 0.4 \end{cases}$$

xətti tənliklər sisteminin iterasiya üsulu ilə həllində birinci iki yaxınlaşmanı tapanq. Əvvəlcə verilən tənliklər sistemini normal şəkildə gətirək.

$$\begin{cases} x_1 = -0.2x_1 + 0.2x_2 - 0.3x_3 - 0.6 \\ x_2 = 0.2x_1 - 0.6x_2 + 0.1x_3 + 0.3 \\ x_3 = -0.3x_1 + 0.1x_2 - 0.5x_3 - 0.4 \end{cases}$$

Verilən tənliklər sistemini (3) şəklinə gətirdik. İterasiya üsulunu tətbiq etmək üçün $\|\alpha\| < 1$ şərti ödənməlidir. Aşağıdakı fraqmetndə Mathcad sistemində α matrisi və β sərbəst hədlər sütununun verilməsi, α matrisinin normasının hesablanması verilmişdir.



α matrisinin norması 0.9 olduğundan iterasiya üsulundan istifadə etmək olar. Sıfırıncı yaxınlaşmanı sərbəst hədlər sütununu qəbul edib ($x_0 = \beta$) birinci və ikinci yaxınlaşmaları

$$X^{(k)} = \beta + \alpha * X^{(k-1)}$$

düsturu ilə tapaq. Mathcad mühitində tərtib olunmuş hesabat blokunda birinci (x_1) və ikinci (x_2) yaxınlaşmalarında alınmış nəticələr verilmişdir.

$$\begin{array}{l}
 i := 1..3 \qquad \qquad \qquad x_0 := \beta \\
 x_{1i} := \beta_i + \sum_{j=1}^3 \alpha_{i,j} \cdot x_{0j} \\
 \\
 x_1 = \begin{pmatrix} -0.3 \\ -0.04 \\ 0.01 \end{pmatrix} \\
 \hline
 x_0 := x_1 \\
 i := 1..3 \\
 x_{2i} := \beta_i + \sum_{j=1}^3 \alpha_{i,j} \cdot x_{1j} \\
 \\
 x_2 = \begin{pmatrix} -0.551 \\ 0.265 \\ -0.319 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Bu qayda ilə tələb olunan dəqiqliklə tənliklər sisteminin həllini ardıcıl yaxınlaşmalarla tapmaq olar.

Zeydel üsulu

Bu üsul iterasiya üsulunun müəyyən mənada təkmilləşmiş formasıdır. Zeydel üsulunda j -cu yaxınlaşmada x_i^j dəyişəninə qiyməti elə bu yaxınlaşmada tapılmış $x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{i-1}^{(j)}$ və $j-1$ -ci yaxınlaşmanın $x_i^{(j-1)}, \dots, x_n^{(j-1)}$ qiymətlərinə əsasən tapılır. Tutaq ki, (3) tənliklər sistemi verilmişdir. Başlanğıc $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ sıfırıncı yaxınlaşmasını götürüb (3) tənliklər sisteminin birinci tənliyində (x_1, x_2, \dots, x_n) dəyişənlərinin yerinə yazıb, x_1 dəyişəninə birinci yaxınlaşmada $x_1^{(1)}$ qiymətini tapmaq. $(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ qiymətlərini ikinci tənlikdə (x_1, x_2, \dots, x_n) dəyişənlərinin yerinə yazıb x_2 dəyişəninə birinci yaxınlaşmada $x_2^{(1)}$ qiymətini tapmaq. Nəhayət, $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{n-1}^{(1)}, x_n^{(0)})$ qiymətlərini n -ci tənlikdə (x_1, x_2, \dots, x_n) dəyişənlərinin yerinə yazıb x_n dəyişəninə birinci yaxınlaşmada $x_n^{(1)}$ qiymətini tapmaq. Nəticədə birinci yaxınlaşmanın $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ qiymətləri tapılır. Bu qayda ilə məlum k -cı yaxınlaşmasının qiymətlərinə görə $(k+1)$ -ci yaxınlaşmanın qiymətləri aşağıdakı düsturlarla tapılır.

$$\begin{aligned}
 x_1^{(k+1)} &= \beta_1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j^{(k)} \\
 x_2^{(k+1)} &= \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j} x_j^{(k)} \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_n^{(k+1)} &= \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)} \\
 k &= 0, 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

Zeydel üsulunda xətanın qiymətləndirilməsi və ε dəqiqliklə təqribi həlli üçün iterasiyanın nömrəsi aşağıdakı düsturlarla tapılır.

$$\|X^{(k)} - X^*\| \leq \frac{\|\alpha\|^k}{1 - \|\alpha\|} \|X^{(1)} - X^{(0)}\| \leq \varepsilon \quad k = \left\lceil \frac{\ln(\varepsilon(1 - \|\alpha\|)) - \ln\|X^{(1)} - X^{(0)}\|}{\ln\|\alpha\|} \right\rceil + 1$$

Qeyd etdik ki, normal şəkə gətirilmiş xətti tənliklər sisteminin baxılan təqribi üsullarla həllində $\|\alpha\| < 1$ şərti ödəndikdə iterasiya prosesi yığılır. Müxtəlif yollarla (1) tənliklər sistemi (3) şəklinə gətirilə bilər. Aydındır ki, $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ şərti ödəndikdə α matrisinin

norması vahiddən kiçik olacaqdır. Əgər bu şərt ödənməzsə (1) tənliklər sisteminin tənlikləri üzərində elementar çevirmələr apararaq bu şərtin ödənməsinə nail olmaq olar.

Misal. Aşağıdakı tənliklər sisteminin iterasiya üsulu ilə həlli üçün normal şəkildə yazaq.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0.5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -0.7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2.6 \end{cases}$$

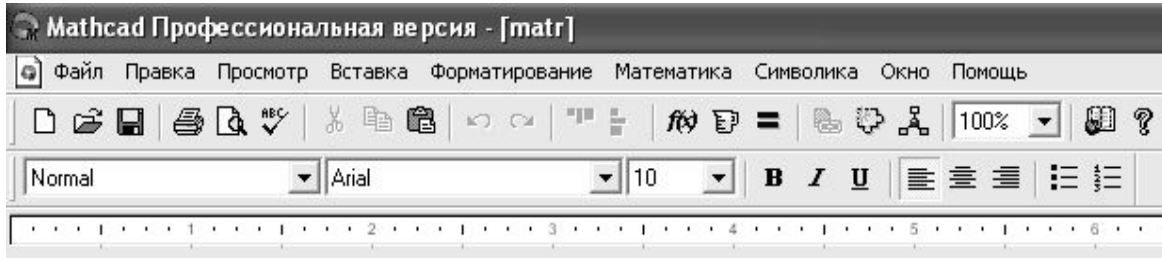
Tənliklər sisteminin birinci tənliyində x_2 məchulunun əmsalı yerdə qalan məchulların əmsallarının mütləq qiymətləri cəmindən böyükdür. Bu tənliyi yeni tənliklər sistemində ikinci yazaq. Verilən tənliklər sistemində ikinci tənliyi 3-ə vurub üçüncü tənliyin üzərinə əlavə edib, yeni tənliklər sistemində birinci yazaq. Alınan tənlikdə x_1 məchulunun əmsalı yerdə qalan məchulların əmsallarının mütləq qiymətləri cəmindən böyük olacaqdır. Eyni qayda ilə verilən tənliklər sistemində birinci tənliyi 2-yə, ikinci tənliyi mənfi 3-ə, üçüncü tənliyi isə 2-yə vurub cəmləyək və yeni tənliklər sistemində üçüncü yazaq. Verilən tənliklər sistemi ilə ekvivalent olan aşağıdakı tənliklər sistemini alırıq:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0.6 \\ -2x_1 + x_2 + 9x_3 = 8.5 \end{cases}$$

Alınmış tənliklər sistemində birinci tənlikdə x_1 , ikinci tənlikdə x_2 , üçüncü tənlikdə isə x_3 məchulunun əmsalı yerdə qalan məchulların əmsallarının mütləq qiymətləri cəmindən böyükdür. Əgər birinci tənlikdən x_1 , ikinci tənlikdən x_2 , üçüncü tənlikdə isə x_3 məchulunu tapsaq, tənliklər sistemi aşağıdakı kimi yazılar.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{14} + 0x_1 - \frac{2}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}x_1 + 0x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_3 = \frac{17}{18} + \frac{2}{9}x_1 - \frac{1}{9}x_2 + 0x_3 \end{cases} \quad \|\alpha\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| = \frac{2}{3} < 1$$

α matrisinin norması vahiddən kiçik olduğundan iterasiya və Zeydel üsullarını tətbiq etmək olar. §4.2. misal 1-də iterasiya üsulunda alınmış birinci yaxınlaşmanı sıfırıncı yaxınlaşma qəbul edək və Zeydel üsulu ilə birinci yaxınlaşmanı tapan.



$$x_0 = \begin{pmatrix} -0.3 \\ -0.04 \\ 0.01 \end{pmatrix} \quad x_{01} := \beta_1 + \sum_{j=1}^3 \alpha_{1,j} \cdot x_{0j} \quad x_0 = \begin{pmatrix} -0.551 \\ -0.04 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

$$x_{02} := \beta_2 + \sum_{j=1}^3 \alpha_{2,j} \cdot x_{0j} \quad x_0 = \begin{pmatrix} -0.551 \\ 0.215 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

$$x_{03} := \beta_3 + \sum_{j=1}^3 \alpha_{3,j} \cdot x_{0j} \quad x_0 = \begin{pmatrix} -0.551 \\ 0.215 \\ -0.218 \end{pmatrix} \quad x_1 := \begin{pmatrix} -0.551 \\ 0.215 \\ -0.218 \end{pmatrix}$$

Mathcad sistemində tərtib olunmuş hesabat blokundan istifadə edərək birinci yaxınlaşmaya görə ikinci və nəhayət tələb olunan dəqiqliklə tənliklər sisteminin həlli tapıla bilər.

Qeyri-xətti tənliklər sisteminin təqribi üsullarla həlli

Ümumi halda

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

qeyri-xətti tənliklər sisteminə baxaq. Məçhulların və tənliklərin sayı bir olduğu halda bir dəyişənli qeyri-xətti tənlik alınır ki, həll üsullarına üçüncü fəsilə baxılıb. Dəyişən və tənliklərin sayı çox olduğu halda məsələnin həlli çətinləşir. Bu tip məsələlərin həlli üçün müxtəlif üsullar işlənmişdir. Bu üsullardan İterasiya və Nüton üsullarından daha geniş istifadə olunur.

İterasiya üsulu

Tutaq ki, (5) tənliklər sistemi aşağıdakı şəkildə yazılmışdır.

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

Fərz edək ki, (6) tənliklər sisteminin n ölçülü fəzanın hər hansı qapalı oblastında yeganə

x_i^* ($i=1,2,\dots,n$) həlli var və bu həllə yaxın x_i^0 ($i=1,2,\dots,n$) qiymətləri məlumdur. Birinci iterasiyanı

$$x_i^{(1)} = \varphi_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \quad (i=1,2,\dots,n),$$

ikinci iterasiyanı

$$x_i^{(2)} = \varphi_i(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) \quad (i=1,2,\dots,n),$$

nəhayət k -cı iterasiyanı

$$x_i^k = \varphi_i(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \dots, x_n^{k-1}) \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (7)$$

düsturları ilə aparsaq $X^{(j)}$ ($j=1,2,\dots,k$) vektorlar ardıcılığını alırıq. Əgər $k \rightarrow \infty$ şərtində $x_i^{(k)} \rightarrow x_i^*$ olarsa deyirlər ki, $X^{(k)}$ vektorlar ardıcılığı X^* həllinə yığılır.

$$X^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = X^*$$

Bu halda tələb olunan ε dəqiqliklə (6) tənliklər sisteminin təqribi həlli tapıla bilər. Yeni operator daxil etmək üçün $\|X\|_1$ normasından istifadə edərək, məsafə anlayışını verək. İki X' və X'' vektorları arasında məsafə aşağıdakı kimi verilir.

$$\rho(X', X'') = \|X' - X''\|_1 = \max_i |X' - X''|$$

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ $y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i=1,2,\dots,n$) qəbul etsək və A operatorunu $Y = AX$ kimi təyin etsək (7) tənliklər sistemi əvəzinə $X^{(i+1)} = AX^i$ vektor bərabərliyini alırıq.

n ölçülü fəzada $\forall X', X'' \in G$ üçün

$$|\varphi_i(X') - \varphi_i(X'')| \leq K \rho(X', X'')$$

şərti ödənərsə, onda deyirlər ki, $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i=1,2,\dots,n$) funksiyaları Lipsits şərtini ödəyir. Burada K Lipsits sabiti adlanır. İterasiya prosesinin yığılması aşağıdakı teoremlə müəyyən olunur.

Teorem. Əgər $\forall X, X^* \in G$ üçün $\rho(X, X^*) < r$ olduqda $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i=1,2,\dots,n$) funksiyaları Lipsits şərtini ödəyirsə və $K < 1$ olarsa onda $\forall X^0 \in G$ başlanğıc

yaxınlaşması üçün koordinatları

$$x^{(k+1)} = \varphi_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \quad (k=0,1,2,\dots)$$

düsturu ilə hədləri təyin olunan vektorlar ardıcılılığı yığılır.

Teoremin isbatı sıxılmış inikas prinsipinə əsaslanır və müxtəlif ədəbiyyatlarda verilmişdir.

Tutaq ki, G oblastında $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i=1,2,\dots,n$) funksiyalarının birinci tərtib kəsilməz $\frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_j}$ ($j, i=1,2,\dots,n$) törəmələri var.

$$M_{ij} = \max_G \left| \frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_j} \right|$$

işarə edək və fərz edək ki, (6) tənliklər sisteminin G oblastında yeganə $X^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ həlli var. Aydındır ki, $X^0, X^{(k)} \in G$, ($k=0,1,2,\dots$) olduqda $X^{(k-1)}$ və X^* nöqtələrini birləşdirən düz xətt parçası üzərində elə P^{k-1} nöqtəsi var ki,

$$x_i^{(k)} - x_i^* = \varphi_i(X^{(k-1)}) - \varphi_i(X^*) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i(P^{k-1})}{\partial x_j} (x_j^{(k-1)} - x_j^*) \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (8)$$

şərti gəzənir. Əgər

$$M_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(p_1^{(k)})}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(p_1^{(k)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(p_1^{(k)})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(p_2^{(k)})}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(p_2^{(k)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2(p_2^{(k)})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n(p_n^{(k)})}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n(p_n^{(k)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(p_n^{(k)})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

işarələməsini aparsaq (8) münasibətini

$$X^{(k)} - X^* = M_{k-1}(X^{(k-1)} - X^*)$$

şəkilində yazıla bilər. Bu iterasiya prosesinin yığılan olması üçün M_k matrisinin norması vahiddən kiçik olmalıdır.

$$\begin{aligned} X^{(k)} - X^* &= M_{k-1}(X^{(k-1)} - X^*) = M_{k-1}(M_{k-2}(X^{(k-2)} - X^*)) = \\ &= M_{k-1}M_{k-2}\dots M_1M_0(X^{(0)} - X^*) \end{aligned}$$

$$k \rightarrow \infty, X^{(k)} - X^* \rightarrow 0 \Rightarrow X^{(k)} \rightarrow X^*, M_{k-1}M_{k-2}\dots M_1M_0 \rightarrow 0$$

M matrisinin elementlərini $\alpha_{ij} = \max_G \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|$ kimi qəbul etsək $M_{k-1}M_{k-2}\dots M_1M_0$ matrisinin

hər bir elementi M^k matrisinin uyğun elementindən böyük deyil. Əgər M matrisinin norması vahiddən kiçik olarsa iterasiya prosesi yığılandır. Dəyişənlərin sayının iki olduğu hala baxaq. Tutaq ki,

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y) \\ y = \varphi_2(x, y) \end{cases} \quad (9)$$

tənliklər sistemi verilmişdir. (x_0, y_0) başlanğıc yaxınlaşmasına görə

$$\begin{cases} x_n = \varphi_1(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ y_n = \varphi_2(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

düsturları ilə iterasiya prosesinin yığılan olması aşağıdakı teoremlə müəyyən olunur.

Teorem. Tutaq ki, $R\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ oblastında (9) tənliyinin yeganə (x^*, y^*) həlli var. Əgər:

1. R oblastında $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$ funksiyaları kəsilməz diferensiallanandırsa;
2. R -dən götürülmüş (x_0, y_0) başlanğıc yaxınlaşması və (10) düsturları ilə tapılmış (x_n, y_n) yaxınlaşmaları R -də yerləşirsə;
3. R -də

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

matrisinin norması vahiddən kiçikdirsə (10) düsturları ilə aparılan iterasiya prosesi (x^*, y^*) həllinə yığılır. İterasiya üsulunda xəta

$$|x_n - x^*| + |y_n - y^*| \leq \frac{M}{1-M} (|x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}|) \leq \varepsilon$$

şerti ilə qiymətləndirilir.

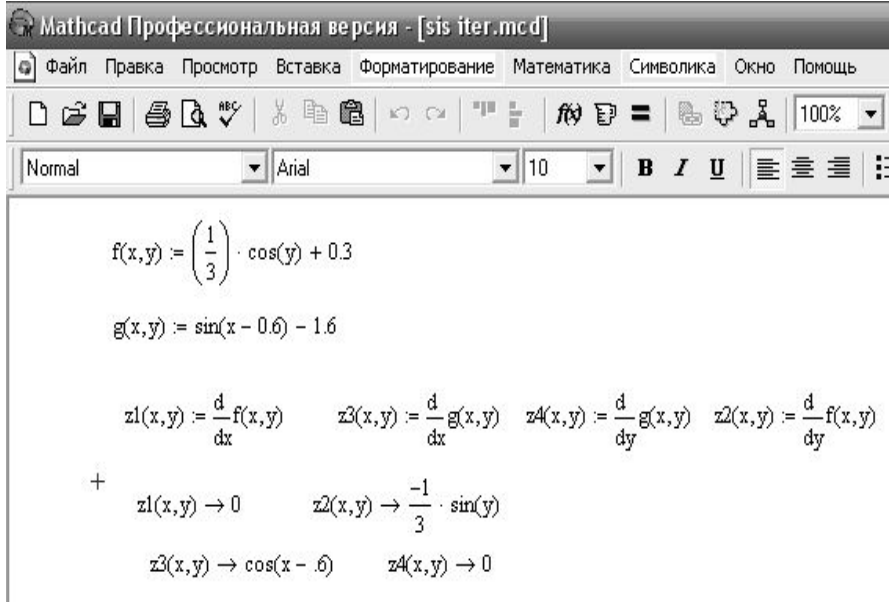
Misal. İterasiya üsulu ilə

$$\begin{cases} \sin(x-0.5) - y = 1.6 \\ 3x - \cos y = 0.9 \end{cases}$$

qeyri-xətti tənliklər sistemini həll edək. Əvvəzləmələr aparıb tənliklər sistemini aşağıdakı şəkildə yazaq.

$$\begin{cases} y = g(x, y) \equiv \sin(x - 0.5) - 1.6 \\ x = f(x, y) \equiv \frac{1}{3} \cos y + 0.3 \end{cases}$$

$f(x, y)$ və $g(x, y)$ funksiyalarının x və y dəyişənlərinə nəzərən xüsusi törəmələrini tapıb



$0 \leq x \leq 0.3, -2.2 \leq y \leq -1.8$ oblastında qiymətləndirək. Bu oblastda $f(x, y)$ və $g(x, y)$ funksiyalarının x və y -ə görə xüsusi törəmələrinin ($z1(x, y)$ və $z3(x, y)$, $z2(x, y)$ və $z4(x, y)$) cəmi vahiddən kiçik olduğundan tənliklər sisteminin təqribi kökünü iterasiya üsulu ilə tapmaq. Mathcad sistemində tərtib olunmuş hesabat blokunda iterasiya nəticələri (x və y) və hər bir iterasiyada $f(x, y)$ və $g(x, y)$ funksiyalarının qiymətləri əks olunmuşdur.

$f(x, y) := \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \cos(y) + 0.3$ $g(x, y) := \sin(x - 0.6) - 1.6$ $S_{0,0} := 0.15 \quad S_{1,0} := -2$ <p>$j := 1$</p> $S_{0,j} := f(S_{0,j-1}, S_{1,j-1})$ $S_{1,j} := g(S_{0,j-1}, S_{1,j-1})$ <p>$j := 2$</p> $S_{0,j} := f(S_{0,j-1}, S_{1,j-1})$ $S_{1,j} := g(S_{0,j-1}, S_{1,j-1})$ <p>$j := 3$</p> $S_{0,j} := f(S_{0,j-1}, S_{1,j-1})$ $S_{1,j} := g(S_{0,j-1}, S_{1,j-1})$ <p>$j := 4$</p> $S_{0,j} := f(S_{0,j-1}, S_{1,j-1})$ $S_{1,j} := g(S_{0,j-1}, S_{1,j-1})$	$S = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.161 & 0.151 & 0.154 & 0.151 & 0.152 & 0.151 \\ -2 & -2.035 & -2.025 & -2.034 & -2.032 & -2.034 & -2.033 \end{pmatrix}$ $j := 0..6$ $x_j := S_{0,j} \quad y_j := S_{1,j}$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th></th> <th>$f(S_{0,j}, S_{1,j})$</th> <th>$g(S_{0,j}, S_{1,j})$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$x =$</td> <td>$y =$</td> <td>0.161</td> <td>-2.035</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>0.151</td> <td>-2.025</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>0.154</td> <td>-2.034</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>0.151</td> <td>-2.032</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>0.152</td> <td>-2.034</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>0.151</td> <td>-2.033</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>0.151</td> <td>-2.034</td> </tr> </tbody> </table>			$f(S_{0,j}, S_{1,j})$	$g(S_{0,j}, S_{1,j})$	$x =$	$y =$	0.161	-2.035			0.151	-2.025			0.154	-2.034			0.151	-2.032			0.152	-2.034			0.151	-2.033			0.151	-2.034
		$f(S_{0,j}, S_{1,j})$	$g(S_{0,j}, S_{1,j})$																														
$x =$	$y =$	0.161	-2.035																														
		0.151	-2.025																														
		0.154	-2.034																														
		0.151	-2.032																														
		0.152	-2.034																														
		0.151	-2.033																														
		0.151	-2.034																														

Tərtib olunmuş hesabat blokundan istifadə edərək, qeyri-xətti tənliklər sistemini iterasiya üsulu ilə həll etmək olar.

Nyuton üsulu

Tutaq ki,

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

tənliklər sisteminin hər hansı üsulla n -ci yaxınlaşmada təqribi (x_n, y_n) həlli məlumdur. (x^*, y^*) dəqiq həllini

$$\begin{cases} x^* = x_n + h_n \\ y^* = y_n + k_n \end{cases}$$

Qəbul edib tənliklər sistemini aşağıdakı kimi yazaraq.

$$\begin{cases} f(x_n + h_n, y_n + k_n) = 0 \\ g(x_n + h_n, y_n + k_n) = 0 \end{cases}$$

$f(x, y), g(x, y)$ funksiyalarının (x_n, y_n) nöqtəsinin yaxın ətrafında Teylor sırasına ayıraq, h_n, k_n artımlarının kiçik olduğunu nəzərə alıb xətti hissəni götürək.

$$\begin{cases} f(x_n + h_n, y_n + k_n) = f(x_n, y_n) + h_n f'_x(x_n, y_n) + k_n f'_y(x_n, y_n) + O_1(h_n, k_n) \\ g(x_n + h_n, y_n + k_n) = g(x_n, y_n) + h_n g'_x(x_n, y_n) + k_n g'_y(x_n, y_n) + O_2(h_n, k_n) \end{cases} \quad (11)$$

$O_1(h_n, k_n)$ və $O_2(h_n, k_n)$ -də h_n, k_n artımlarını yüksək tərtib qüvvətləri iştirak etdiyindən onları sonsuz kiçik qəbul edək və (11)-i aşağıdakı şəkildə yazaraq.

$$\begin{cases} -f(x_n, y_n) = h_n f'_x(x_n, y_n) + k_n f'_y(x_n, y_n) \\ -g(x_n, y_n) = h_n g'_x(x_n, y_n) + k_n g'_y(x_n, y_n) \end{cases} \quad (12)$$

Alınmış tənliklər sistemindən h_n, k_n artımlarını taparaq

$$h_n = \frac{\begin{vmatrix} -f(x_n, y_n) f'_y(x_n, y_n) \\ -g(x_n, y_n) g'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_x(x_n, y_n) f'_y(x_n, y_n) \\ g'_x(x_n, y_n) g'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}} \quad k_n = \frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_n, y_n) - f(x_n, y_n) \\ g'_x(x_n, y_n) - g(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_x(x_n, y_n) f'_y(x_n, y_n) \\ g'_x(x_n, y_n) g'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}} \quad (13)$$

Tapılan h_n və k_n qiymətlərinə görə

$$X^{(n+1)} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_n \\ k_n \end{pmatrix}$$

ardıcıl yaxınlaşmaları qurulur.

$\|X^{(n+1)} - X^{(n)}\|^2 \leq \varepsilon$ şərti ödəndikdə iterasiya prosesini dayandırmaq olar və $X^{(n+1)}$ yaxınlaş-

ması verilən tənliklər sisteminin ε dəqiqliklə həllidir.

Misal. Aşağıdakı tənliklər sistemini Nüton üsulu ilə həll edək.

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - 6y - 4 = 0 \\ x^2 - 3y^2 + 4x - 2 = 0 \end{cases}$$

Tənliklərin sol tərəflərini

$$F(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 6y - 4$$

$$G(x, y) = x^2 - 3y^2 + 4x - 2$$

funksiyaları ilə işarə edək. $F(x, y)$ və $G(x, y)$ funksiyalarının x, y dəyişənlərinə nəzərən xüsusi törəmələrinin, (13) düsturları ilə hesabat üçün Mathcad sistemində hesabat bloku aşağıdakı fraqmentdə verilmişdir. Tərtib olunmuş hesabat blokundan istifadə edərək iterasiya-lar qurulmuşdur. Başlangıç iterasiya kimi $x = 0.5, y = -0.46$ qiymətləri götürülmüşdür.

The screenshot shows the Mathcad Professional interface with the following content:

$$F(x, y) := 2 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2 - 6 \cdot y - 4$$

$$F_x(x, y) := \frac{d}{dx} F(x, y) \quad F_y(x, y) := \frac{d}{dy} F(x, y)$$

$$F_x(x, y) \rightarrow 4 \cdot x \quad F_y(x, y) \rightarrow 6 \cdot y - 6$$

$$G(x, y) := x^2 - 3 \cdot y^2 + 4 \cdot x - 2$$

$$G_x(x, y) := \frac{d}{dx} G(x, y) \quad G_y(x, y) := \frac{d}{dy} G(x, y)$$

$$G_x(x, y) \rightarrow 2 \cdot x + 4 \quad G_y(x, y) \rightarrow -6 \cdot y$$

$$A(x, y) := \begin{pmatrix} F_x(x, y) & F_y(x, y) \\ G_x(x, y) & G_y(x, y) \end{pmatrix}$$

$$A_H(x, y) := \begin{pmatrix} -F(x, y) & F_y(x, y) \\ -G(x, y) & G_y(x, y) \end{pmatrix} \quad A_K(x, y) := \begin{pmatrix} F_x(x, y) & -F(x, y) \\ G_x(x, y) & -G(x, y) \end{pmatrix}$$

$$H(x, y) := \frac{|A_H(x, y)|}{|A(x, y)|} \quad K(x, y) := \frac{|A_K(x, y)|}{|A(x, y)|}$$

İterasiya nəticələri (S matrisində) və hər bir iterasiyada $F(x, y)$ və $G(x, y)$ funksiyalarının qiymətləri aşağıdakı fraqmentdə verilmişdir.

$$\begin{aligned}
S_{0,0} &:= 0.5 & S_{1,0} &:= -0.46 \\
j &:= 1 \\
S_{0,j} &:= S_{0,j-1} + H(S_{0,j-1}, S_{1,j-1}) & S_{1,j} &:= S_{1,j-1} + K(S_{0,j-1}, S_{1,j-1}) \\
j &:= 2 \\
S_{0,j} &:= S_{0,j-1} + H(S_{0,j-1}, S_{1,j-1}) & S_{1,j} &:= S_{1,j-1} + K(S_{0,j-1}, S_{1,j-1}) \\
j &:= 3 \\
S_{0,j} &:= S_{0,j-1} + H(S_{0,j-1}, S_{1,j-1}) & S_{1,j} &:= S_{1,j-1} + K(S_{0,j-1}, S_{1,j-1}) \\
j &:= 4 \\
S_{0,j} &:= S_{0,j-1} + H(S_{0,j-1}, S_{1,j-1}) & S_{1,j} &:= S_{1,j-1} + K(S_{0,j-1}, S_{1,j-1})
\end{aligned}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5742335766 & 0.5727153517 & 0.57271498 & 0.57271498 \\ -0.46 & -0.4550608273 & -0.4541894809 & -0.4541887891 & -0.4541887891 \end{pmatrix}$$

$j := 0..4$

$F(S_{0,j}, S_{1,j}) =$	$G(S_{0,j}, S_{1,j}) =$
-0.1052	-0.3848
0.0110944341	0.0054374376
0.00000068877	0.0000000273
0	-0
0	0

Üçüncü iterasyada alınmış $x = 0.57271498$ $y = -0.4541887891$ qiymətləri tənliklər sisteminin 0.000001 dəqiqliklə həllidir.

Tapşırıq. Aşağıdakı xətti tənliklər sistemini (1-3) iterasiya və Zeydel üsulları ilə həll edin.

$$1. \begin{cases} x_1 = -0.2x_1 + 0.2x_2 - 0.3x_3 - 0.5 \\ x_2 = 0.2x_1 - 0.5x_2 + 0.1x_3 + 0.3 \\ x_3 = -0.3x_1 + 0.1x_2 - 0.5x_3 - 0.4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0.6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -0.7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2.6 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 = 0.1667x_2 - 0.25x_3 - 0.5 \\ x_2 = 0.125x_1 + 0.625x_3 + 0.1875 \\ x_3 = 0.2x_1 + 0.0667x_2 - 0.2667 \end{cases}$$

6-cı mövzu

İTERPOLYASIYA MƏSƏLƏSİ

Riyazi analiz kursundan məlumdur ki, funksiya analitik, qrafik və cədvəl şəkilində verilə bilər. Praktiki məsələlərin həllində çox vaxt funksiya cədvəl şəkilində verilir. Yəni arqumentin sonlu sayda qiymətlərində funksiyanın qiymətləri məlum olur. Tutaq ki, arqumentinin $[a, b]$ parçasında yerləşən $x_i, (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ qiymətlərində funksiyanın $y_i = f(x_i)$ qiymətləri məlumdur.

X	x_0	x_1	x_2	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_n)$

Bir çox məsələlərdə arqumentin $[x_0, x_n]$ parçasında yerləşən, cədvəldə olmayan $x^* \neq x_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ qiymətində funksiyanın $f(x^*)$ qiymətini tapmaq tələb olunur. Bu məsələnin həlli üçün elə $p(x)$ funksiyası qururlar ki, $f(x)$ və $p(x)$ funksiyalarının qiymətləri arqumentin cədvəldə verilmiş məlum qiymətlərində üst-üstə düşsün və arqumentin $[x_0, x_n]$ parçasında yerləşən, cədvəldə olmayan qiymətlərində isə biri-birindən az fərqlənsin. Deyilən şərtləri ödəyən $p(x)$ funksiyasının qurulmasına interpolasiya məsələsi deyilir. Arqumentin məlum qiymətlərinə $x_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ interpolasiyanın düyün nöqtələri deyilir. Düyün nöqtələrindən fərqli və $[x_0, x_n]$ parçasında yerləşən nöqtələrdə $p(x)$ funksiyasının qiymətinin hesablanması $f(x)$ funksiyasının interpolasiyası adlanır. $x \notin [x_0, x_n]$ olduqda $p(x)$ funksiyasının qiymətinin hesablanması $f(x)$ funksiyasının ekstrapolyasiyası adlanır. Bir çox ədəbiyyatlarda qeyd olunur ki, funksiyanın ifadəsi çox mürəkkəb olduqda arqumentin bəzi (funksiya qiymətinin asan hesablanılan) qiymətlərində funksiya qiymətini hesablayıb, cədvəl tərtib edib $p(x)$ funksiyasını qururlar və hesabatlarda $f(x)$ funksiyası əvəzinə $p(x)$ funksiyasından istifadə edirlər.

Birdəyişənli $y = f(x)$ funksiyası üçün interpolasiya etmənin həndəsi mənası müstəvinin $(x_i, f(x_i)), (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ nöqtələrindən keçən funksiyanın tapılmasından

ödənəcəkdir. Ancaq düyün nöqtələrində $\varphi_i(x)$ funksiyaları $n+1$ sayda nöqtədə sıfıra çevrilərsə, bu halda $|A|=0$ olar. Deməli $\varphi_i(x)$ ($i=0,1,2,\dots,n$) funksiyalarının xətti asılı olmaması ilə yanaşı, köklərinin sayı n -dən çox olmamalıdır. Bu şərtləri ödəyən $\varphi_i(x)$ ($i=0,1,2,\dots,n$) funksiyalar sisteminə Çebişev sistemi deyilir. (1) tənliklər sistemindən a_i , ($i=0,1,2,\dots,n$) əmsallarını tapaq.

$$a_i = \frac{|A_i|}{|A|}, (i=0,1,2,\dots,n)$$

Burada $|A_i|$ ($i=0,1,2,\dots,n$) determinantları $|A|$ determinantının i -ci sütununun B sütun vektoru ilə əvəz olunmasından alınır. a_i , ($i=0,1,2,\dots,n$) əmsallarının bu qiymətlərini (1)-də nəzərə alaraq:

$$p_n(x) = \frac{|A_0|}{|A|} \varphi_0(x) + \frac{|A_1|}{|A|} \varphi_1(x) + \dots + \frac{|A_n|}{|A|} \varphi_n(x)$$

$|A_i|$ determinantlarını i -ci sütununun elementlərinə nəzərə alınaraq ayrılışını yazıb

$$a_i = \frac{\sum_{j=0}^n f(x_j) |A_{ji}|}{|A|}, (i=0,1,2,\dots,n)$$

(burada $|A_{ji}|$ determinantları i -ci sütun elementlərinin cəbri tamamlayıcılarıdır) tapılmış a_i ($i=0,1,2,\dots,n$) əmsallarının qiymətlərini (1)-də nəzərə alıb, $f(x_j)$ -lara görə qruplaşdırsaq aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$p_n(x) = \Phi_0(x)f(x_0) + \Phi_1(x)f(x_1) + \dots + \Phi_n(x)f(x_n) \quad (3)$$

$\Phi_i(x)$, ($i=0,1,2,\dots,n$) funksiyaları $\varphi_i(x)$ ($i=0,1,2,\dots,n$) funksiyalarının xətti kombinasiyalarıdır və $f(x)$ funksiyasından asılı deyil. Tapılmış $p_n(x)$ çoxhədlisi x_i , ($i=0,1,2,\dots,n$) düyün nöqtələrində

$$p_n(x_i) = f(x_i) = \Phi_0(x_i)f(x_0) + \Phi_1(x_i)f(x_1) + \dots + \Phi_n(x_i)f(x_n)$$

şərtini ödəməlidir. Əgər $\Phi_i(x)$ funksiyalarını aşağıdakı kimi seçsək,

$$\Phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

düyün nöqtələrində $p_n(x_i) = f(x_i)$ şərti ödənər.

Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisi

$\varphi_i(x)$ funksiyalar sistemi kimi $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$ funksiyalarını götürək. Bu funksiyalar xətti asılı deyil və hər hansı $[a, b]$ parçasında $\sum_{i=0}^n c_i x^i$ çoxhədlisinin sıfırlarının sayı n -dən çox deyil ($c_i, (i=0,1,2,\dots,n)$ əmsallarının hamısı birdən sıfır ola bilməz). Bu halda (2) xətti tənliklər sisteminin matrisi aşağıdakı kimi olar.

$$A = \begin{pmatrix} 1x_0x_0^2x_0^3\dots x_0^n \\ 1x_1x_1^2x_1^3\dots x_1^n \\ \dots\dots\dots \\ 1x_nx_n^2x_n^3\dots x_n^n \end{pmatrix}$$

$|A|$ determinantı Vandermond determinantı adlanır. (4) şərtini nəzərə alaraq və $\Phi_i(x) (i=0,1,2,\dots,n)$ funksiyalarını aşağıdakı şəkildə axtaraq.

$$\Phi_i(x) = C * (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n) \quad (5)$$

Şərtə görə $x = x_i$ nöqtələrində $\Phi_i(x_i) = 1$ olmalıdır.

$$1 = C * (x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n) \Rightarrow$$

$$C = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

Alınmış bu ifadəni (5)-də nəzərə alaraq.

$$\Phi_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

Əksər ədəbiyyatlarda Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisi $L_n(x)$ -lə işarə olunur. Bunu nəzərə alaraq, ixtiyari düyün nöqtələri üçün Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisini aşağıdakı kimi yazma bilərik:

$$L_n(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)} f(x_1) \dots$$

$$\begin{aligned} & \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} f(x_i) + \dots \\ & \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} f(x_n) = \\ & = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} f(x_i) \quad (6) \end{aligned}$$

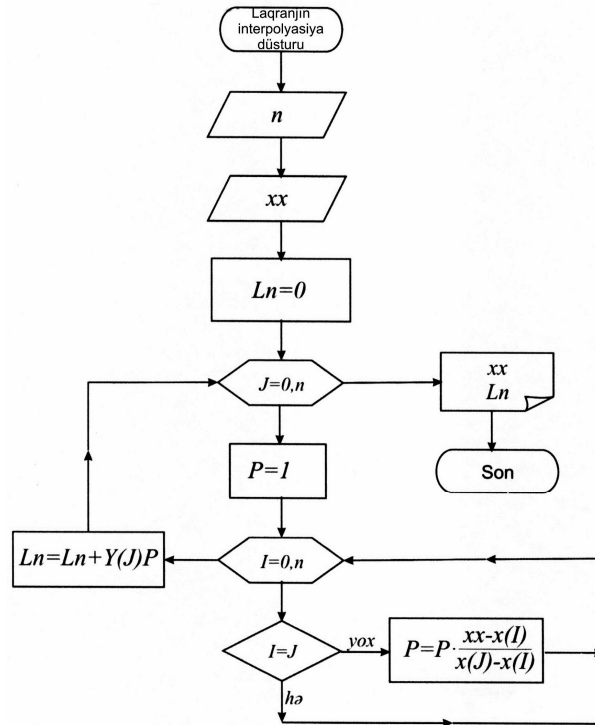
Misal 1. Cədvəl şəkilində verilmiş

i	0	1	2	3
x	1	2	4	5
y	2	1	2	3

funksiya üçün Laqranjın üçüncü tərtib interpolyasiya çoxhədlisini yazmaq.

$$\begin{aligned} L_3(x) &= 2 * \frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-4)(1-5)} + 1 * \frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-4)(2-5)} + \\ & + 2 * \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-5)} + 3 * \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-4)} = \\ & = -\frac{1}{6}(x-2)(x-4)(x-5) + \frac{1}{6}(x-1)(x-4)(x-5) - \frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-5) + \frac{1}{4}(x-1)(x-2)(x-4) \end{aligned}$$

Laqranjın interpolyasiya düsturu ilə hesabat blok sxemi şəkil 5.1-də verilmişdir.



Şəkil 5.1.

Biri-birindən bərabər məsafədə yerləşən düyün nöqtələri üçün Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisi

Tutaq ki, düyün nöqtələri biri-birindən bərabər məsafədə yerləşir.

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} = h = \text{const.}$$

Bu halda Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisi xeyli sadələşir. $q = \frac{x-x_0}{h}$ əvəzləməsini

aparaq və $x - x_i, (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ ifadələrini qiymətləndirək:

$$x - x_0 = qh, x - x_1 = (q-1)h, x - x_2 = (q-2)h, \dots, x - x_i = (q-i)h \dots x - x_n = (q-n)h$$

$$x_i - x_0 = (i-0)h, x_i - x_1 = (i-1)h, x_i - x_2 = (i-2)h, \dots$$

$$x_i - x_{i-1} = (i-i+1)h \dots x_i - x_{i+1} = (i-i-1)h, \dots, x_i - x_n = (i-n)h$$

$$1 * 2 * 3 * \dots * (i-1) * i = i!, 1 * 2 * 3 \dots (n-i-1) * (n-i) = (n-i)!$$

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Bunları (6)-da nəzərə alaq.

$$\begin{aligned} L_n(x) &= L_n(x_0 + qh) = \sum_{i=0}^n \frac{qh(q-1)h(q-2)h \dots (q-i+1)h(q-i-1)h \dots (q-n)h}{ih(i-1)(i-2)h \dots (i-i+1)h(i-i-1)h \dots (i-n)h} f(x_i) = \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{q(q-1) \dots (q-i+1)(q-i-1) \dots (q-n)}{i * (i-1) * (i-2) \dots 2 * 1 * (-1)^{n-i} 1 * 2 * \dots (n-i-1)(n-i)} f(x_i) = \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{q(q-1)(q-2) \dots (q-n)n!}{(q-i)i!(n-i)!n!} f(x_i) = \sum_{i=0}^n \frac{q(q-1) \dots (q-n) C_n^i (-1)^{n-i}}{q-i n!} f(x_i) = \\ &= \frac{q(q-1)(q-2) \dots (q-n)}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} C_n^i}{q-i} f(x_i) \end{aligned}$$

Nəticədə düyün nöqtələri biri-birindən bərabər məsafədə yerləşdikdə Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisini aldıq.

$$L_n(x) = L_n(x_0 + qh) = \frac{q(q-1)(q-2) \dots (q-n)}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} C_n^i}{q-i} f(x_i) \quad (7)$$

Misal. $y = \ln(x)$ funksiyası cədvəl şəkilində verilmişdir.

i	0	1	2
x	3	4	5
y	1.0986	1.3863	1.6094

Laqranjın (6) interpolyasiya düsturundan istifadə edərək $x=4.5$ nöqtəsində funksiyanı interpolyasiya edək .

$$L_2(x) = 1.0986 * \frac{(x-4)(x-5)}{(3-4)(3-5)} + 1.3863 * \frac{(x-3)(x-5)}{(4-3)(4-5)} + 1.6094 * \frac{(x-3)(x-4)}{(5-3)(5-4)} =$$

$$= -0.0323x^2 + 0.5138x - 0.1521$$

$$L_2(4.5) = 1.5059$$

(7) düsturundan istifadə edərək, $x=4.5$ nöqtəsində funksiyanı interpolyasiya edək.

$$x_0 = 3, h = 1, n = 2, x = 4.5 \quad q = \frac{(x-x_0)}{h} = x - 3$$

$$L_2(x) = L_2(x_0 + qh) = \frac{q(q-1)(q-2)}{2!} \sum_{i=0}^2 \frac{(-1)^{2-i} C_2^i}{q-i} y_i =$$

$$\frac{q(q-1)(q-2)}{2!} \left(\frac{C_2^0}{q} y_0 - \frac{C_2^1}{q-1} y_1 + \frac{C_2^2}{q-2} y_2 \right) = \frac{q(q-1)(q-2)}{2} \left(\frac{y_0}{q} - \frac{2y_1}{q-1} + \frac{y_2}{q-2} \right)$$

$$q = \frac{(x-x_0)}{h} = 4.5 - 3 = 1.5$$

$$L_2(4.5) = L_2(3 + 1.5 * 1) = 1.5059$$

Hər iki halda nəticələr eynidir.

Eytkenin interpolyasiya sxemi

Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisi ilə $f(x)$ funksiyanı interpolyasiya etmək üçün əvvəlcə (6), (7) düsturları ilə interpolyasiya çoxhədlisi qurulur, sonra isə tələb olunan x nöqtəsində qiymət hesablanır. Ancaq Eytkenin interpolyasiya sxemindən istifadə etsək, interpolyasiya çoxhədlisi qurulmadan $f(x)$ funksiyanı arqumentin məlum qiymətlərinə görə interpolyasiya etmək olar. Tutaq ki,

$$x_i, y_i = f(x_i) \quad \vee \quad x_{i+1}, y_{i+1} = f(x_{i+1})$$

qiymətləri məlumdur.

$$L_{i,i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x \end{vmatrix} \quad (8)$$

birdərəcəli $L_{i,i+1}(x)$ çoxhədlisinin $x = x_i$ nöqtəsində qiymətini hesablayaq.

$$L_{i,i+1}(x_i) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{vmatrix} y_i & x_i - x_i \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x_i \end{vmatrix} = \frac{y_i(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} = y_i$$

(8)-i sadələşdirsək iki x_i və x_{i+1} düyün nöqtələri üçün Laqranjın $L_1(x)$ xətti funksiyasını alarıq. Digər tərəfdən bu münasibəti iki nöqtədən keçən düz xəttin tənliyindən də almaq olar. Hər hansı x^* nöqtəsində funksiyasını interpolasiya etmək üçün (8)-də x -in yerinə x^* yazmaq lazımdır.

$$L_{i,i+1}(x^*) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{vmatrix} y_i & x_i - x^* \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x^* \end{vmatrix}$$

Əgər düyün nöqtələrinin sayı üç (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) olarsa hesabat düsturu aşağıdakı kimi

$$y_{i-1} = f(x_{i-1}), y_i = f(x_i), y_{i+1} = f(x_{i+1})$$

$$L_{i-1,i,i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_{i-1}} \begin{vmatrix} L_{i-1,i}(x) & x_{i-1} - x \\ L_{i,i+1}(x) & x_{i+1} - x \end{vmatrix}$$

olar. Bu prosesi davam etdirsək

$$L_{0123..n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0} \begin{vmatrix} L_{012..(n-1)}(x) & x_0 - x \\ L_{123..n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}$$

Laqranjın $L_n(x)$ interpolasiya çoxhədlisini alarıq. Əgər $x_i, (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ düyün nöqtələrində $L_n(x)$ interpolasiya çoxhədli qurulmuşsa, sonradan x_{n+1} nöqtəsində $y_{n+1} = f(x_{n+1})$ qiyməti məlum olduqda $L_{n+1}(x)$ interpolasiya çoxhədli qurmaq üçün hesabatları yenidən aparmaq lazımdır. Eytkenin interpolasiya sxemində isə hesabatlar yenidən aparılmır və ixtiyari sayda düyün nöqtələrini əlavə etməklə aparılmış hesabat nəticələrindən istifadə edərək, interpolasiya etmək və interpolasiya çoxhədli qurmaq olar.

Laqranjın interpolasiya düsturunun xətası

Aydındır ki, interpolasiyanın düyün nöqtələrində interpolasiya olunan funksiyanın qiyməti Laqranjın interpolasiya çoxhədli sinin qiymətinə bərabər olacaqdır. Ancaq düyün nöqtələrindən fərqli nöqtələrdə bu qiymətlər biri-birindən fərqli olacaqdır. Bu fərq müxtəlif səbəblərdən yaranır. Yalnız $f(x)$ funksiyası tərtibi n -dən böyük olmayan çoxhədli

şəkilində olduqda $f(x)$ və $L_n(x)$ çoxhədliləri eyni olacaqdır. Laqranjın interpoliyasıya düsturunda xətanı, yəni üsulun xətasını

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

işarə edək və qiymətləndirək. Köməkçi $\varphi(x)$ funksiyasına baxaq.

$$\varphi(x) = R_n(x) - k \prod_{n+1}(x) \quad (9)$$

$$\prod_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Aydındır ki,

$$\begin{aligned} R_n(x_i) &= f(x_i) - L_n(x_i) = 0 \\ \varphi(x_i) &= R_n(x_i) - k \prod_{n+1}(x_i) = 0 \\ (i &= 0, 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

yəni $\varphi(x)$ funksiyasının $[a, b]$ ($x_0 = a, x_n = b$) parçasında $n+1$ sayda (düyün nöqtələrində) sıfırı olacaqdır. k əmsalını elə seçək ki, $\varphi(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ düyün nöqtələrindən fərqli interpoliyasıya olunan x^* nöqtəsində sıfır çevrilsin $\varphi(x^*) = 0$. Onda $\varphi(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında $n+2$ sayda sıfırı olacaqdır. Rol teoreminə görə $\varphi'(x)$ funksiyasının sıfırlarının sayı $n+1$ olacaqdır.

$$\varphi'(\tau_0) = \varphi'(\tau_1) = \dots = \varphi'(\tau_n) = 0$$

Rol teoremini $\varphi'(x)$ funksiyasına tətbiq etsək, $\varphi''(x)$ funksiyasının sıfırlarının sayı n , nəhayət $\varphi^{(n)}(x)$ funksiyasının sıfırlarının sayı iki, $\varphi^{(n+1)}(x)$ funksiyasının sıfırlarının sayı isə bir olacaqdır.

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$$

(9)- dan $\varphi^{(n+1)}(x)$ -i tapaq. Laqranjın interpoliyasıya çoxhədlisinin tərtibi n , $\prod_{n+1}(x)$ funksiyasının tərtibi $n+1$ oldyğundan $L_n^{n+1}(x) = 0$ və $\prod_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ olar. Bunları nəzərə alsaq, k əmsalanı tapa bilərik.

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Onda qalıq həddi aşağıdakı kimi olar.

$$R_n(x^*) = f(x^*) - L_n(x^*) = k(x^* - x_0)(x^* - x_1) \dots (x^* - x_n) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x^* - x_0)(x^* - x_1) \dots (x^* - x_n)$$

$M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$ işarə etsək və $f(x)$ funksiyanın interpolasiya olunduğu x^* nöqtəsinin ixtiyari olduğunu nəzərə alsaq xəta

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)| \quad (10)$$

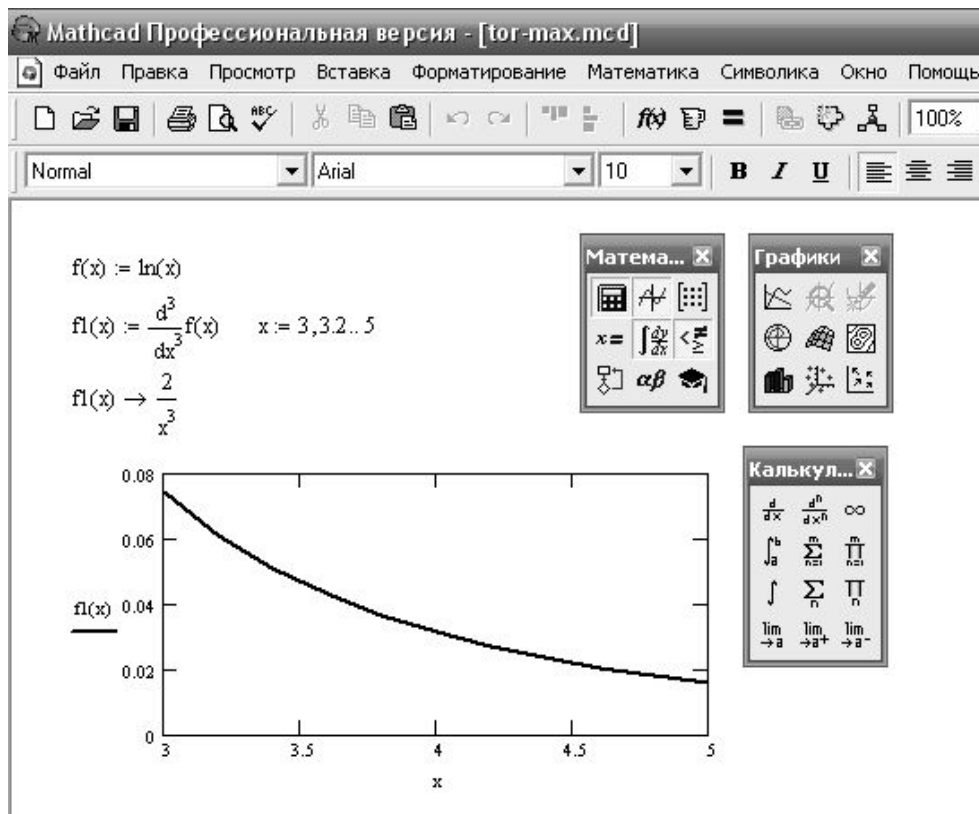
düsturu ilə qiymətləndirilər.

§5.2-də verilmiş misalda interpolasiya düsturunun xətasını qiymətləndirək.

$$|R_2(x)| = |f(x) - L_2(x)| \leq \frac{M_3}{(2+1)!} |(x-3)(x-4)(x-5)|$$

$$M_3 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(3)}(x)|$$

$f(x) = \ln(x)$ funksiyanın 3-cü tərtib törəməsinin $[3,5]$ parçasında maksimumunu tapmaq üçün Mathcad sistemində hesabat bloku tərtib edək.



Tərtib olunmuş hesabat blokundan görünür ki, verilən funksiyanın üçüncü tərtib törəməsi $[3,5]$ parçasında monoton azalır. Deməli $f(x) = \ln(x)$ funksiyanın üçüncü tərtib törəməsi

$f_1(x) = \frac{2}{x^3}$ funksiyası $x = 3$ nöqtəsində maksimum qiymətini alır.

$$M_3 = \max_{x \in [a,b]} \left| \frac{2}{x^3} \right| = \frac{2}{27}$$

Bu nəticələri nəzərə alsaq, Laqranjin interpolyasiya düsturundan istifadə edərək, $x=4.5$ nöqtəsində interpolyasiya zamanı xətanı aşağıdakı kimi qiymətləndirmək olar.

$$|R_2(4.5)| \leq \frac{1}{81} |(4.5-3)(4.5-4)(4.5-5)| = \frac{1}{81} * \frac{3}{8} = 0.0046$$

Xətanın minimum olması üçün düyün nöqtələrinin seçilməsi

İnterpolysiyada xətanın qiymətləndirilməsi düsturundan görünür ki, xəta $|f^{(n+1)}(x)|_{\forall x} \prod_{n+1}(x)$ ifadələrinin qiymətlərindən asılıdır. $|f^{(n+1)}(x)|$ -i $[a,b]$ parçasında maksimumunu qiymətləndirmək mümkündür. $\prod_{n+1}(x)$ -in qiyməti isə $x_i (i=0,1,2,\dots,n)$ düyün nöqtələrindən asılıdır. Düyün nöqtələrinin seçilməsi üçün Çebişev çoxhədlisindən istifadə edək.

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), |x| \leq 1$$

$$n=1 \Rightarrow T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x, n=2 \Rightarrow T_2(x) = \cos(2 \arccos(x)) = 2x^2 - 1$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

rekurent düsturundan istifadə edərək $T_n(x)$ çoxhədlisinin x^n həddinin əmsalının 2^{n-1} olduğunu görürük. $T_n(x)$ çoxhədlisinin kökləri

$$\cos(n \arccos(x)) = 0 \Rightarrow n \arccos(x) = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow$$

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

düsturu ilə tapılır və n sayda kökü $[-1,1]$ parçasında yerləşir. Bu parçada $T_n(x)$ -in maksimumu 1-ə bərabərdir və aşağıdakı şəkildə yazıla bilər.

$$T_{n+1}(x) = 2^n (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) \Rightarrow$$

$$|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)| = \frac{1}{2^n} |T_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$$

Deməli düyün nöqtələri əvəzinə Çebişev çoxhədlisinin köklərini götürsək, Laqranjin interpolyasiya çoxhədlisinin xətası:

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M}{2^n(n+1)!}$$

kimi qiymətləndirilə bilər. Qeyd edək ki, dəyişəni əvəz etməklə ixtiyari $[a, b]$ parçası üçün bu qiymətləndirməni aparmaq olar.

7-ci mövzu Sonlu fərqlər

Tutaq ki, interpolyasiyanın $x_0 + ih, (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ düyün nöqtələri bərabər məsafədə yerləşib. $x_{i+1} - x_i = h = const$.

Bu düyün nöqtələrində $f(x)$ funksiyasının qiymətləri $y_i = f(x_i)$ məlumdur.

$$y_1 - y_0, y_2 - y_1, \dots, y_n - y_{n-1}$$

fərqləri birinci tərtib sonlu fərqlər adlanır. Müxtəlif ədəbiyyatlarda x_i nöqtəsində sonlu fərq

$$\nabla y_{i+1}, \delta y_{i+\frac{1}{2}}, f'_{i+\frac{1}{2}}, \Delta y_i$$

kimi işarə olunur və

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

düsturu ilə hesablanır. İkinci, nəhayət k -cı tərtib sonlu fərqlər

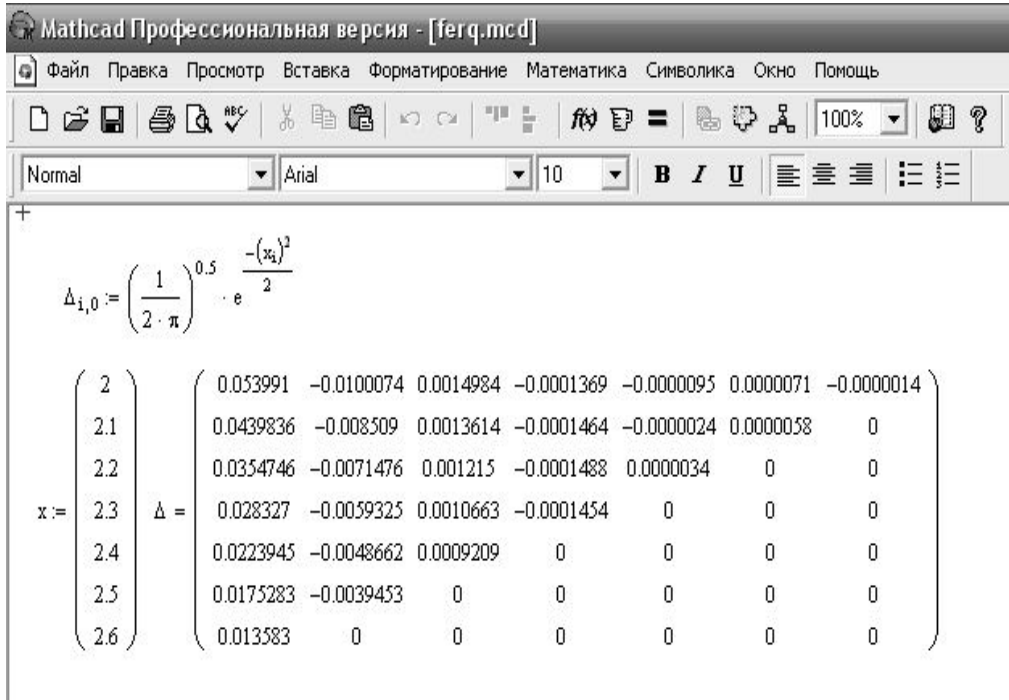
$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \dots, \Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

düsturları ilə hesablanır.

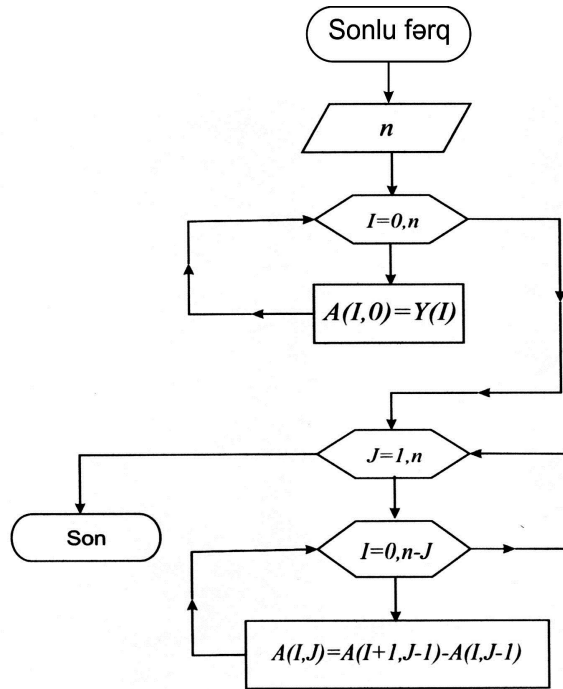
Misal.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} e^{-0.5x^2}$$

funksiyasının $[2, 2.6]$ parçasında $h = 0.1$ addımı ilə qiymətləri verilmişdir. 6-cı tərtibə qədər sonlu fərqləri hesablayaq. Mathcad sistemində tərtib olunmuş aşağıdakı fraqmentdə arqumentin qiymətləri x sütun vektorunda, $\varphi(x)$ funksiyasının qiymətləri isə Δ matrisinin sıfırıncı sütununda verilmişdir. Hesabat nəticələri Δ matrisinin birinci sütununda $\Delta y_0, \Delta y_1, \dots, \Delta y_5$ birinci tərtib sonlu fərqlər, ikinci sütunda $\Delta^2 y_0, \Delta^2 y_1, \dots, \Delta^2 y_4$, nəhayət altıncı sütunun birinci elementində isə altıncı tərtib sonlu fərqlərin $\Delta^6 y_0 = -0.0000014$ qiyməti verilmişdir.



Sonlu fərqin hesabat blok sxemi (şəkil 5.2).



Şəkil 5.2

Sonlu fərqin aşağıdakı xassələri var.

1. Funksiyaların cəbri cəminin k tərtib sonlu fərqi, funksiyaların k tərtib sonlu fərqlərinin cəbri cəminə bərabərdir.

$$\Delta^k (f_i \pm g_i) = \Delta^k f_i \pm \Delta^k g_i$$

2. Funksiyanın λ ədədinə hasilinin k tərtib sonlu fərqi funksiyanın k tərtib sonlu fərqinin λ

ədədinə hasilinə bərabərdir.

$$\Delta^k(\lambda * f) = \lambda * \Delta^k f$$

3. Funksiyanın n tərtib sonlu fərqi m tərtib sonlu fərq, funksiyanın $(n+m)$ tərtib sonlu fərqinə bərabərdir.

$$\Delta^n(\Delta^m f) = \Delta^{n+m} f$$

4. n tərtib çoxhədlinin n tərtib sonlu fərqi sabit, $n+1$ tərtib sonlu fərq isə sıfıra bərabərdir.

Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisi

Tutaq ki, interpolyasiyanın $x_0 + ih (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ düyün nöqtələri bərabər məsafədə yerləşib.

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_n - x_{n-1} = h = \text{const.}$$

Bu düyün nöqtələrində $f(x)$ funksiyasının qiymətləri

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$$

məlumdur. Elə n dərəcəli $P_n(x)$ çoxhədlisi qurmaq tələb olunur ki, interpolyasiyanın düyün nöqtələrində $P_n(x_i) = y_i = f(x_i), (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ şərtləri ödənsin. $P_n(x)$ çoxhədlisini aşağıdakı şəkildə axtaraq:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$x = x_0$ nöqtəsində $P_n(x)$ funksiyasının qiymətini hesablasaq $P_n(x_0) = a_0$ alarıq. Digər tərəfdən $P_n(x_0) = y_0 = f(x_0)$ şərtini nəzərə alsaq $a_0 = y_0$ olar. a_1 əmsalını müəyyən etmək üçün $P_n(x)$ çoxhədlisinin birinci tərtib sonlu fərqi yazaraq.

$$\Delta P_n(x) = P_n(x+h) - P_n(x) =$$

$$= (a_0 + a_1(x+h-x_0) + a_2(x+h-x_0)(x+h-x_1) + a_3(x+h-x_0)(x+h-x_1)(x+h-x_2) + \dots$$

$$+ a_n(x+h-x_0)(x+h-x_1) \dots (x+h-x_{n-1})) - (a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) +$$

$$+ a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1})) =$$

$$a_1(x+h-x_0-x+x_0) + a_2((x+h-x_0)(x+h-x_1) - (x-x_0)(x-x_1)) +$$

$$+ a_3((x+h-x_0)(x+h-x_1)(x+h-x_2) - (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)) + \dots$$

$$\begin{aligned}
& + a_n ((x+h-x_0)(x+h-x_1)\dots(x+h-x_{n-1}) - (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})) = \\
& = ha_1 + 2h(x-x_0)a_2 + 3h(x-x_0)(x-x_1)a_3 + \dots + nh(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-2})a_n
\end{aligned}$$

$P_n(x)$ çoxhədlisinin x_0, x_1 nöqtələrində birinci tərtib, x_0 nöqtəsində isə ikinci tərtib sonlu fərqlərini hesablayaq və a_1, a_2 əmsallarını tapaq:

$$\Delta P_n(x_0) = ha_1 \Rightarrow a_1 = \frac{\Delta P_n(x_0)}{h} = \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{1!h^1}$$

$$\Delta P_n(x_1) = (ha_1 + 2h^2)a_2, \Delta^2 P_n(x_0) = \Delta P_n(x_1) - \Delta P_n(x_0) = 2h^2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{\Delta^2 P_n(x_0)}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$

Ümumi halda $P_n(x)$ çoxhədlisinin əmsalları

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i}, (i = 1, 2, \dots, n)$$

düsturu ilə hesablanır. Bu əmsalları $P_n(x)$ -də nəzərə alsaq, Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisini aşağıdakı kimi yazı bilərik:

$$\begin{aligned}
P_n(x) = & y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \\
& + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})
\end{aligned} \tag{11}$$

§5.6-da hesablanmış sonlu fərqlərə görə Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisini tərtib edək. Aşağıdakı fraqmentdə $x = x_0$ düyün nöqtəsində funksiyanın qiyməti və altıncı tərtibə qədər sonlu fərqlərin qiymətləri verilmişdir.

$$0.053991 \quad -0.0100074 \quad 0.0014984 \quad -0.0001369 \quad -0.0000095 \quad 0.0000071 \quad -0.0000014$$

(11)-də $n = 6$ götürüb hesablanmış sonlu fərq qiymətlərini nəzərə alaq.

$$\begin{aligned}
P_6(x) = & y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \\
& + \frac{\Delta^4 y_0}{4!h^4}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + \frac{\Delta^5 y_0}{5!h^5}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \\
& + \frac{\Delta^6 y_0}{6!h^6}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)
\end{aligned}$$

İnterpolyasiya soxhədlisinin $a_i, (i = 1, 2, \dots, 6)$ əmsallarının qiymətləri aşağıdakı fraqmentdə verilmişdir.

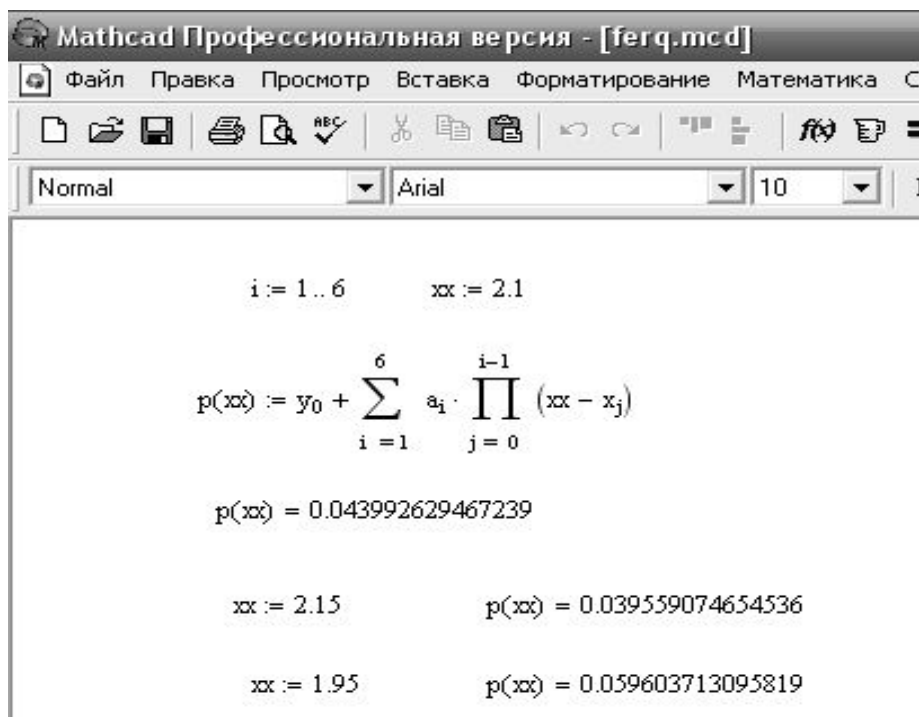
$$i := 1..6$$

$$a_i := \frac{\Delta_{0,i}}{i! \cdot (0.1)^i}$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1000737053 \\ 0.0749183699 \\ -0.0228198948 \\ -0.0039504178 \\ 0.005926135 \\ -0.0018761292 \end{pmatrix}$$

Bu qiymətləri nəzərə alsaq interpolyasiya çoxhədlisi aşağıdakı şəkildə yazılar.

$$P_6(X) = 0.053991 - 0.100074(x-2) + 0.07492(x-2)(x-2.1) - 0.02282(x-2) * (x-2.1)(x-2.2) - 0.00395(x-2)(x-2.1)(x-2.2)(x-2.3) + 0.0059261(x-2)(x-2.1) * (x-2.2)(x-2.3)(x-2.4) - 0.001876(x-2)(x-2.1)(x-2.2)(x-2.3)(x-2.4)(x-2.5)$$



Mathcad sistemində tərtib olunmuş fraqmentdə yoxlama məqsədi ilə $xx = 2.1$ nöqtəsində qiyməti hesablanmışdır. Hesabatın düzgünlüyü yoxlanılmış və $xx = 2.15$ nöqtəsində funksiya interpolyasiya olunmuşdur ($P_6(xx) = 0.0395591$).

Praktik məsələlərin həllində Nyutonun birinci interpolyasiya düsturunun başqa şəkildən istifadə edirlər. Yeni dəyişən daxil edək $q = \frac{x-x_0}{h}$. Burada h interpolyasiya addımıdır.

$$x - x_0 = qh, x - x_1 = (q-1)h, x - x_2 = (q-2)h, \dots, x - x_i = (q-i)h \dots x - x_n = (q-n)h$$

Qiymətlərini (11)-də nəzərə alsaq Nyutonun birinci interpolyasiya düsturunu aşağıdakı kimi yaza bilərik.

$$P_n(x) = P_n(x_0 + qh) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} q(q-1)(q-2) + \dots$$

$$\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q-1)(q-2)(q-3) \dots (q-n+1)$$

$n = 1$ olduqda xüsusi halda xətti interpolyasiya, $n = 2$ olduqda isə kvadratik interpolyasiya düsturunu alırıq.

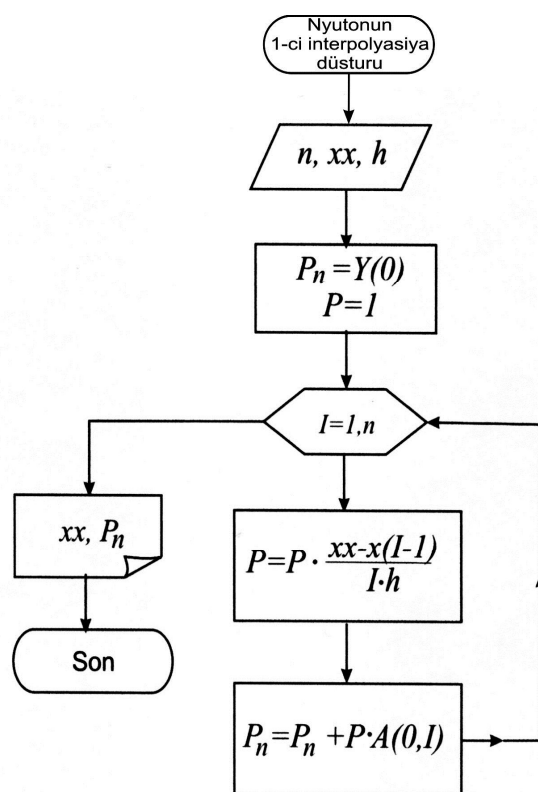
$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 q$$

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 q + \frac{\Delta^2 y_0}{2} q(q-1)$$

Nyutonun birinci interpolyasiya düsturunda xəta

$$R_n(x) = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q-1)(q-2)(q-3) \dots (q-n+1)(q-n)$$

düsturu ilə qiymətləndirilir.



Şəkil 5.3

Nyutonun birinci interpolyasiya düsturunun hesabat blok-sxemi şəkil 5.3-də verilmişdir.

Nyutonun ikinci interpolyasiya çoxhədlisi

Tutaq ki, $[a, b]$ parçasında $f(x)$ funksiyasının $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərində

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$$

məlumdur. İnterpolyasiya addımı h sabitdir $x_{i+1} = x_i + h, (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$. İnterpolyasiya çoxhədlisini aşağıdakı şəkildə axtaraq:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1) \quad (12)$$

$a_i, (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ əmsallarını elə seçək ki, $P_n(x_i) = y_i = f(x_i) (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ şərtləri ödənsin. (12)-də $x = x_n$ yazsaq $P_n(x_n) = y_n = f(x_n) = a_0$ alarıq. Nyutonun birinci interpolyasiya düsturunda olduğu kimi a_1, a_2, \dots, a_n əmsallarını tapmaq üçün $P_n(x)$ çoxhədlisinin birinci tərtib $\Delta P_n(x)$ sonlu fərqi yazaq.

$$\Delta P_n(x) = ha_1 + 2h(x - x_{n-1})a_2 + \dots + nh(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \dots (x - x_1)a_n$$

Bu ifadədə $x = x_{n-1}$ yazsaq a_1 əmsalını tapa bilərik.

$$a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{1h^1}$$

Nyutonun birinci interpolyasiya düsturunda olduğu kimi $P_n(x)$ çoxhədlisinin $x = x_{n-2}$ nöqtəsində ikinci tərtib sonlu fərqi yazıb a_2 əmsalını tapaq.

$$\Delta^2 P_n(x) = 2h^2 a_2 + 2 * 3h^2 (x - x_{n-2}) a_3 + \dots + n(n-1)h^2 (x - x_{n-2})(x - x_{n-3}) \dots (x - x_1) a_n$$

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}$$

Ümumi halda a_i əmsalları aşağıdakı düsturla tapılır.

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!h^i}, i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Əmsalların bu qiymətlərini (12)-də nəzərə alsaq Nyutonun ikinci interpolyasiya düsturunu alarıq:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h} (x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2} (x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3} (x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2}) \dots (x-x_1) \quad (13)$$

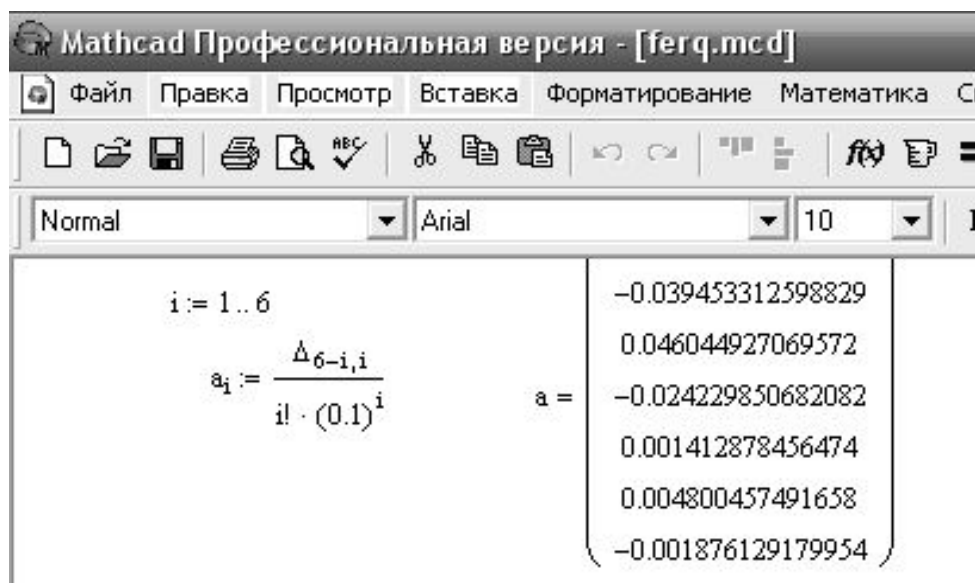
(13)-də $n = 6$ götürüb, hesablanmış sonlu fərq qiymətlərini nəzərə alaraq. §5.6-da verilən misalda hesablanmış sonlu fərqlərə (Δ matrisində diaqonal üzrə yerləşən elementlərin birincisi funksiyanın $x = x_0$ düyün nöqtəsində qiyməti, yerdə qalanları isə ardıcıl olaraq $x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0$ düyün nöqtələrində $\Delta y_5, \Delta^2 y_4, \Delta^3 y_3, \Delta^4 y_2, \Delta^5 y_1, \Delta^6 y_0$ sonlu fərqlərdir) görə Nyutonun ikinci interpolyasiya çoxhədlisini tərtib edək:

$$P_6(x) = y_6 + \frac{\Delta y_5}{1!h} (x-x_6) + \frac{\Delta^2 y_4}{2!h^2} (x-x_6)(x-x_5) + \frac{\Delta^3 y_3}{3!h^3} (x-x_6)(x-x_5)(x-x_4) +$$

$$+ \frac{\Delta^4 y_2}{4!h^4} (x-x_6)(x-x_5)(x-x_4)(x-x_3) + \frac{\Delta^5 y_1}{5!h^5} (x-x_6)(x-x_5)(x-x_4)(x-x_3)(x-x_2) +$$

$$+ \frac{\Delta^6 y_0}{6!h^6} (x-x_6)(x-x_5)(x-x_4)(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)$$

İnterpolyasiya soxhədlisinin $a_i, (i = 1, 2, \dots, 6)$ əmsallarının qiymətləri aşağıdakı fraqmentdə verilmişdir



Bu qiymətləri nəzərə alaraq Nyutonun ikinci interpolyasiya çoxhədlisi aşağıdakı şəkildə yazılır.

$$P_6(x) = 0.013583 - 0.039453(x-2.6) + 0.04605(x-2.6)(x-2.5) -$$

$$- 0.0242(x-2.6)(x-2.5)(x-2.4) + 0.0014(x-2.6)(x-2.5)(x-2.4)(x-2.3) +$$

$$0.0048(x-2.6)(x-2.5)(x-2.4) * (x-2.3)(x-2.2) - 0.001876(x-2.6)(x-2.5) *$$

$$* (x-2.4)(x-2.3)(x-2.2)(x-2.1)$$

Mathcad sistemində tərtib olunmuş hesabat blokundan görünür ki, riyazi simvollar cədvəlinin köməyi ilə çox sadə yolla interpolyasiya çoxhədlisini yazmaq və ixtiyari nöqtədə funksiyanı interpolyasiya etmək olar.

$$\begin{array}{l}
 i := 1..6 \quad xx := 2.4 \\
 p(xx) := y_6 + \sum_{i=1}^6 a_i \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (xx - x_{6-j}) \\
 p(xx) = 0.022411561061157 \\
 xx := 2.55 \quad p(xx) = 0.015466377236127 \\
 xx := 2.65 \quad p(xx) = 0.011929280465222
 \end{array}$$

Mathcad sistemində tərtib olunmuş fraqmentdə yoxlama məqsədi ilə $xx = 2.4$ nöqtəsində qiyməti hesablanmışdır. Hesabatın düzgünlüyü yoxlanılmış və $xx = 2.55$ nöqtəsində funksiyaya interpolyasiya olunmuşdur ($P_6(xx) = 0.0154664$).

$q = \frac{x - x_0}{h}$ əvəzləməsi aparıb, $x - x_i, (i = n - 1, n - 2, \dots, 1)$ ifadələrini qiymətləndirək:

$$x - x_n = qh, x - x_{n-1} = (q+1)h, x - x_{n-2} = (q+2)h, \dots, x - x_1 = (q+n-1)h$$

Bu qiymətləri (13)-də nəzərə alaq:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = P_n(x_0 + qh) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} q(q+1) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!} q(q+1)(q+2) + \dots \\
 \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q+1)(q+2)(q+2) \dots (q+n-1) \quad (14)
 \end{aligned}$$

(13) və (14) düsturları Nyutonun interpolyasiya düsturlarıdır. Bu düsturlarla interpolyasiya etdikdə xəta

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q+1)(q+2)(q+2) \dots (q+n)$$

düsturu ilə qiymətləndirilir.

Qeyd etmək lazımdır ki, parçanın əvvəlində interpolyasiya etdikdə və ya ekstrapolyasiya olunan nöqtə parçanın a ucuna yaxındırsa Nyutonun birinci interpolyasiya düsturundan, parçanın axırında interpolyasiya etdikdə və ya ekstrapolyasiya olunan nöqtə parçanın b ucuna yaxındırsa Nyutonun ikinci interpolyasiya düsturundan istifadə etmək məqsədə uyğundur. Bəzi ədəbiyyatlarda Nyutonun birinci interpolyasiya düsturuna irəliyə interpolyasiya, geriyə ekstrapolyasiya düsturu, Nyutonun ikinci interpolyasiya düsturuna isə geriyə interpolyasiya, irəliyə ekstrapolyasiya düsturu deyilir.

Ayrılan (bölünən) fərqlər

Düyün nöqtələri ixtiyari və bərabər məsafədə olduğu hallarda Laqranjin interpolyasiya düsturlarının çıxarılışına baxdıq. Düyün nöqtələri bərabər uzaqlıqda yerləşən halda Nyutonun birinci və ikinci interpolyasiya düsturlarını sonlu fərqlərdən istifadə edərək yazdıq. Düyün nöqtəsi ixtiyari olduqda Nyutonun interpolyasiya düsturu ayrılan fərqlərin köməyi ilə yazılır. Tutaq ki, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ düyün nöqtələri və bu nöqtələrdə $f(x)$ funksiyasının

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$$

qiymətləri məlumdur. $x_{i+1} - x_i = h_i \neq \text{sabit}$.

$$[x_0; x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, [x_1; x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \dots, [x_i; x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

birinci tərtib ayrılan fərqlər adlanır.

$$[x_0; x_1; x_2] = \frac{[x_1; x_2] - [x_0; x_1]}{x_2 - x_0},$$

$$[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}; x_{i+2}] - [x_i; x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

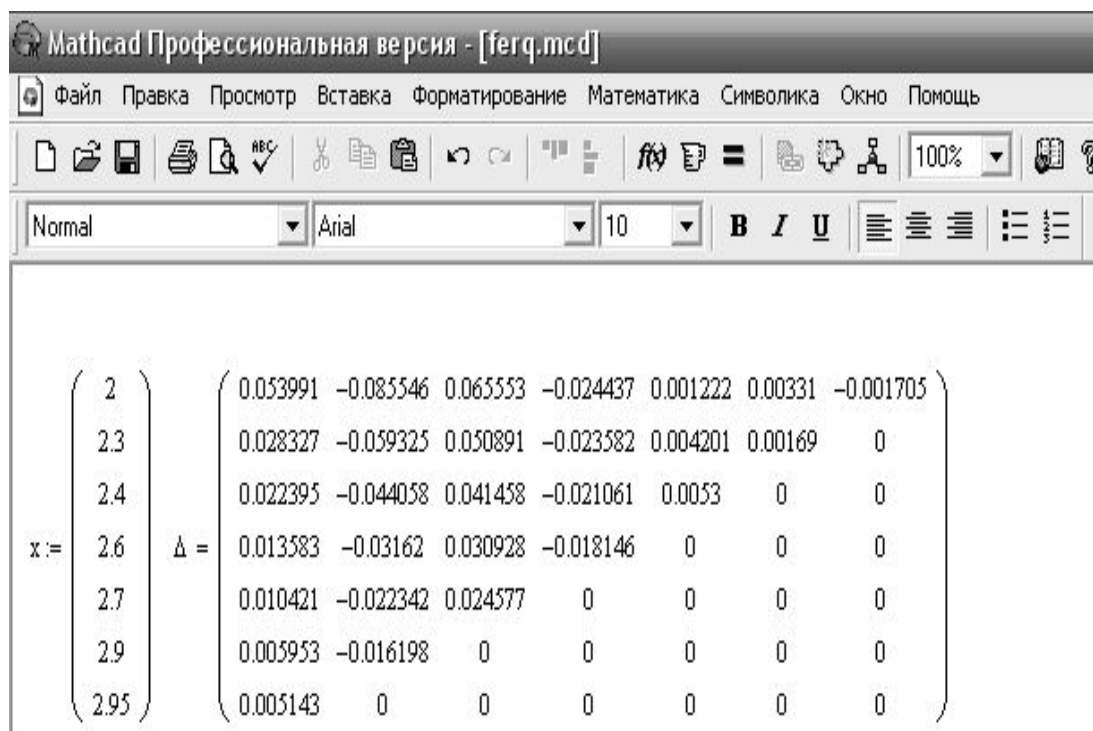
ikinci tərtib ayrılan fərqlər,

$$[x_0; x_1; x_2; \dots; x_k] = \frac{[x_1; x_2; \dots; x_k] - [x_0; x_1; \dots; x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

k tərtibli ayrılan fərq adlanır və bəzi ədəbiyyatlarda $f(x_0; x_1), f(x_0; x_1; \dots; x_k)$ kimi də işarə olunur.

Misal. Aşağıdakı fraqmentdə arqumentin qiymətləri (x) sütun vektorunda, §5.6 veril-

miş funksiyanın qiymətləri isə Δ matrisinin sıfıncı sütununda verilmişdir. Δ matrisinin birinci sütununda $x_i, (i = 0, 1, 2, \dots, 5)$ düyün nöqtələrində birinci tərtib, ikinci



sütunda $x_i, (i = 0, 1, 2, \dots, 4)$ düyün nöqtələrində ikinci tərtib və nəhayət 6-cı sütunun birinci sətirində altıncı tərtib ayrılan fərqlər hesablanmışdır.

Düyün nöqtələri bərabər məsafədə yerləşməyən halda Nyutonun interpolyasiya düsturu

Tutaq ki, $x_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ düyün nöqtələrində $f(x)$ funksiyanın $y_i = f(x_i)$, $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ qiymətləri məlumdur. Elə $p(x)$ çoxhədlisi axtarılır ki,

$$P(x_i) = y_i = f(x_i), (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

şərti ödənsin. $p(x)$ çoxhədlisinin birinci tərtib ayrılan fərqi yazaq.

$$[x; x_0] = \frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow p(x) = p(x_0) + [x; x_0](x - x_0)$$

İkinci tərtib ayrılan fərqlərdən istifadə edib $[x; x_0]$ ayrılan fərqi tapaq və $p(x)$ -in ifadəsində yerinə yazaq.

$$[x; x_0; x_1] = \frac{[x; x_0] - [x_0; x_1]}{x - x_1} \Rightarrow [x; x_0] = [x_0; x_1] + [x; x_0; x_1](x - x_1)$$

$$p(x) = p(x_0) + [x_0; x_1](x - x_0) + [x; x_0; x_1](x - x_0)(x - x_1)$$

$$[x; x_0; x_1; x_2] = \frac{[x; x_0; x_1] - [x_0; x_1; x_2]}{x - x_2} \Rightarrow [x; x_0; x_1] = [x; x_0; x_1; x_2](x - x_2) + [x_0; x_1; x_2]$$

$$p(x) = p(x_0) + [x_0; x_1](x - x_0) + [x_0; x_1; x_2](x - x_0)(x - x_1) + [x; x_0; x_1; x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Bu prosesi davam etdirsək:

$$p(x) = p(x_0) + [x_0; x_1](x - x_0) + [x_0; x_1; x_2](x - x_0)(x - x_1) + [x_0; x_1; x_2; x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + [x_0; x_1; \dots; x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Nəticədə ixtiyari düyün nöqtələri üçün Nyutonun interpolyasiya düsturunu aldıq.

§5.9-da hesablanmış ayrılan fərqlərə görə Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisini yazaq. $n = 6$ və birinci tərtibdən altıncı tərtibə qədər ayrılan fərqlərin Δ matrisinin sıfırıncı sətirindəki qiymətləri nəzərə alsaq, ixtiyari düyün nöqtələri üçün Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisi aşağıdakı şəkildə yazılar:

$$p(x) = 0.053991 - 0.0855463(x - 2) + 0.0655553(x - 2)(x - 2.3) - 0.024437(x - 2)(x - 2.3)(x - 2.4) + 0.001222(x - 2)(x - 2.3)(x - 2.4)(x - 2.6) + 0.00331(x - 2)(x - 2.3)(x - 2.4) * (x - 2.6)(x - 2.7) - 0.001705(x - 2)(x - 2.3) * (x - 2.4)(x - 2.6)(x - 2.7)(x - 2.9)$$

Mathcad sistemində ixtiyari düyün nöqtəsi üçün Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisi aşağıdakı hesabat bloku ilə verilir.

$$i := 1..6 \quad xx := 2.6$$

$$p(xx) := y_0 + \sum_{i=1}^6 \Delta_{0,i} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (xx - x_j)$$

$$p(xx) = 0.013583$$

$$xx := 2.55 \quad p(xx) = 0.015449$$

$$xx := 2.65 \quad p(xx) = 0.011912$$

Bu hesabat blokundan istifadə edilərək $xx = 2.6$, $xx = 2.55$ və $xx = 2.65$ nöqtələrində funksiya interpolyasiya olunmuşdur.

Tərsinə interpolasiya

Tutaq ki, $[a, b]$ parçasında $x_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ düyün nöqtələrində $f(x)$ funksiyasının $y_i = f(x_i) (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ qiymətləri məlumdur. Funksiyanın məlum qiymətinə görə arqumentin qiymətinin tapılması tələb olunur. Laqranjın interpolasiya düsturunu yazaq.

$$y = L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} f(x_i)$$

Funksiyanın $y_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ qiymətlərini arqumentin qiymətləri və arqumentin $x_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ qiymətlərini isə funksiyanın qiymətləri kimi qəbul edib, Laqranjın interpolasiya düsturunu yazaq:

$$x = L_n(y) = \sum_{i=0}^n \frac{(y-y_0)(y-y_1)\dots(y-y_{i-1})(y-y_{i+1})\dots(y-y_n)}{(y_i-y_0)(y_i-y_1)\dots(y_i-y_{i-1})(y_i-y_{i+1})\dots(y_i-y_n)} x_i \quad (15)$$

(15)-də y -ə qiymət verməklə x -i tapa bilərik. Tərsinə interpolasiyadan cədvəl şəklində verilmiş funksiyanın sıfırının tapılmasında istifadə etmək olar. Funksiyanın cədvəlində $y_i * y_{i+1} < 0$ şərtini ödəyən parça tapılır. Tərsinə interpolasiya düsturunda $y = 0$ yazılır və x -in qiyməti tapılır.

8-ci mövzu Aproximasiya məsələsinin qoyuluşu

Praktik məsələlərin həlli tədqiq olunan obyektin riyazi modelinin qurulması ilə yerinə yetirilir. Əksər hallarda tədqiq olunan obyekt müəyyən edən, onu xarakterizə edən göstəricilərinin dəyişməsinə səbəb olan amillərin hamısını nəzərə almaq mümkün olmur. Bu halda qurulmuş riyazi modellə alınmış nəticələr ilə real prosesdəki nəticələr arasında fərqlər meydana gəlir. Bu fərq müxtəlif səbəblərdən, ölçmələr nəticəsində xətalardan, nəzərə alınmayan amilin təsirindən, təsadüfi amillərin təsirindən və sairədən əmələ gələ bilər. Tutaq ki, öyrənilən prosesi xarakterizə edən funksional asılılıq məlum deyil və onun qiymətlər cədvəli verilibdir $(x_i, y_i) (i = 0, 1, 2, \dots, n)$. Əksər praktik məsələlərdə ölçmələr nəticəsində bu tip cədvəllər alınır. Elə bir $f(x)$ funksiyası axtarılır ki, bu funksiyanın $x_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ nöqtələrində qiymətləri $y_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ qiymətlərindən ən az fərqlənsin. Tapılan bu düstur empirik düstur adlanır. Məsələnin bu cür qoyuluşu qeyri müəyyən-dir. Ona görə də tədqiq olunan proses haqqında məlumatlara əsasən x və y arasında əlaqənin

formasını, onun hansı funksiyalar sinfinə aid olması müəyyənləşdirilir (qüvvət, üstlü, triqonometrik, loqarifmik). Bəzi hallarda (x_i, y_i) ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) qiymətlərinə görə asılılığın dəyişmə xarakteri haqqında təxmini fikir söyləmək üçün riyazi statistikanın üsullarından istifadə edilir. Burada sual olunur: nə üçün interpolasiya çoxhədlilərindən istifadə olunmur.

1. y_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) qiymətləri dəqiq deyil və qurulmuş çoxhədli müstəvinin (x_i, y_i) ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) nöqtələrində keçsə də y_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) göstəricilərinin dəyişmə dinamikasını (trend) xarakterizə etmir.

2. Praktikada axtarılan asılılıq çox vaxt proqnoz məqsədilə qurulur ki, interpolasiya çoxhədliləri bu halda demək olar ki, istifadə oluna bilməz.

Deyilənləri nəzərə alsaq yuxarıda qoyulan məsələnin həllini, yəni empirik düsturun qurulmasını iki mərhələyə bölə bilərik.

1. Qurulacaq düsturun formasının müəyyən olunması. Çox vaxt buna nəzəri asılılıq da deyilir.

2. x, y dəyişənləri arasında müəyyən olunmuş nəzəri asılılığın qane edici parametrlərinin müəyyən olunması.

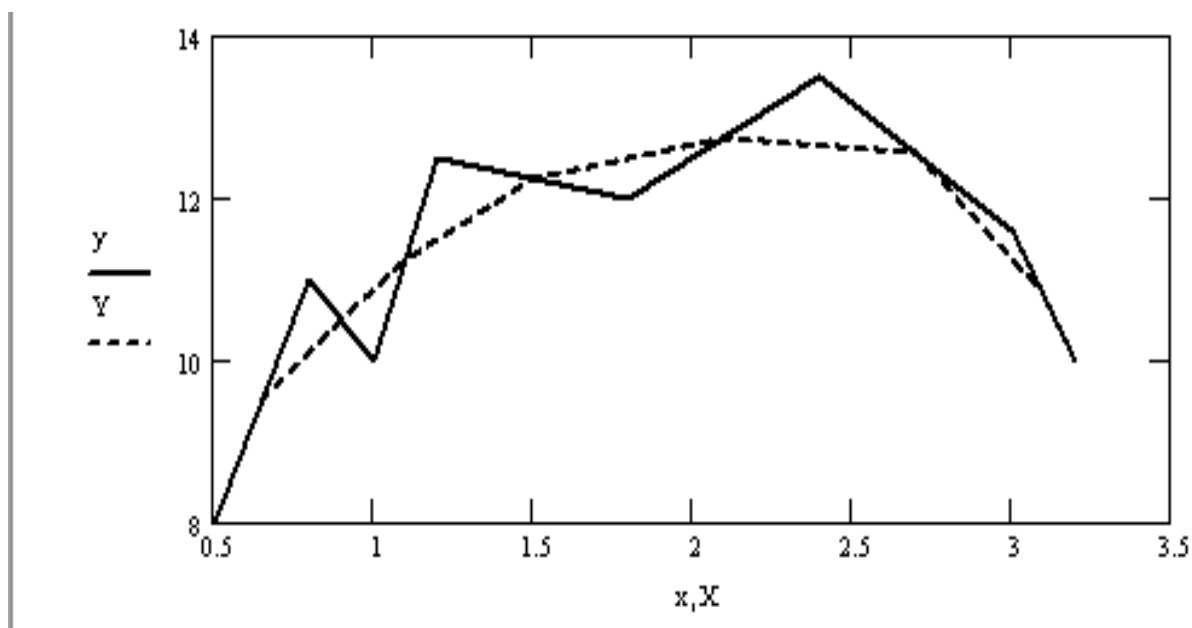
Bu məsələ verilənlərin müəyyən formalı asılılıq ilə aproksimasiyası adlanır.

Empirik düsturun formasının müəyyən olunması üçün müxtəlif üsullar vardır. Bu üsullar riyazi statistikanın üsullarıdır. Tutaq ki, (x_i, y_i) ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) qiymətləri məlumdur.

$$X_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, Y_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}, (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

düsturları ilə verilənləri hamarlaşdırmaqla asılılığın forması haqqında fikir söyləmək mümkündür. Aşağıda tərtib olunmuş hesabat blokunda x və y dəyişənlərinin qiymətləri hamarlaşdırılmış və nəticələr X və Y dəyişənlərinə mənimsədilmişdir.

Eyni bir koordinat müstəvisində hər iki asılılığın qrafikləri qurulmuşdur. x və y arasında



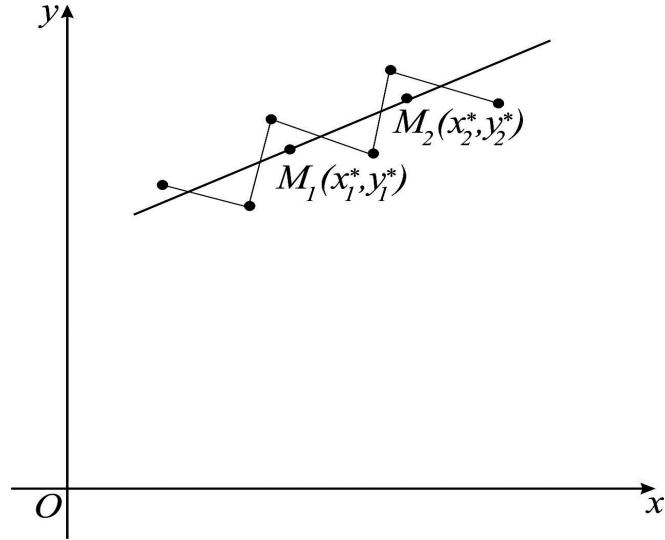
dəyişmə bütöv sınıq xəttlə, X və Y arasında dəyişmə qırıq xətlərlə göstərilmişdir. Qrafikdən görünür ki, X və Y arasında asılılıq kvadratik asılılığa daha yaxındır.

Bu hesablamalarda iki nöqtəyə görə hamarlaşdırma apardıq. Hamarlaşdırma 3, 4, ... nöqtəyə görə də aparıla bilər. Verilənlərin tabe olduğu asılılığın forması xüsusi hallarda ayrılan fərqlərlə də müəyyən oluna bilər. Birinci və ikinci tərtib ayrılan fərqlərlə verilənləri hamarlaşdırmaq və asılılığın forması haqqında fikir söyləmək olar. Əgər birinci tərtib ayrılan fərqlər sabitdirsə asılılıq xətti, ikinci tərtib ayrılan fərqlər sabitdirsə kvadratik asılılıq nəzəri asılılıq kimi götürülməlidir.

2. Parametrlərin müəyyən olunması üçün bir neçə üsul var. Bir dəyişənli xətti asılılığın parametrlərinin təqribi müəyyən olunmasına baxaq.

1. *Qeyd olunmuş nöqtələr üsulu*. Tutaq ki, $(x_i, y_i), (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ qiymətləri verilmişdir. $y = ax + b$ xətti asılılığının a, b parametrlərini tapmaq lazımdır. xOy koordinat müstəvisində $(x_i, y_i), (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ nöqtələrini qeyd edək. Bu dəyişməyə uyğun olan düz xətti çəkək (şəkil 5.4). Bu düz xətt üzərində $M_1(x_1^*, y_1^*)$ və $M_2(x_2^*, y_2^*)$ nöqtələrini qeyd edib onların koorinatlarını müəyyən edək. $M_1(x_1^*, y_1^*)$ və $M_2(x_2^*, y_2^*)$ nöqtələrinin koorinatlarını düz xəttin tənliyində nəzərə alsaq a, b parametrlərinə nəzərən xətti tənliklər sistemini alarıq.

$$\begin{cases} ax_1^* + b = y_1^* \\ ax_2^* + b = y_2^* \end{cases}$$



Şəkil 5.4.

Bu xətti tənliklər sistemini həll edib a, b parametrlərini tapıb $y = ax + b$ nəzəri asılılığında yerinə yazsaq empirik düstur alarıq.

2. *Ortalaşdırma üsulu.* $(x_i, y_i), (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ verilənləri iki qrupa bölünür. $(x_i, y_i), (i = 0, 1, 2, \dots, k)$ və $(x_i, y_i), (i = k + 1, \dots, n)$. Hər bir qrup üçün funksiyanın nəzəri və faktiki qiymətlər fərqinin sıfır olması şərtindən aşağıdakı tənliklər sistemini alarıq.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k (y_i - ax_i - b) = 0 \\ \sum_{i=k+1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \sum_{i=1}^k x_i + bk = \sum_{i=1}^k y_i \\ a \sum_{i=k+1}^n x_i + b(n - k) = \sum_{i=k+1}^n y_i \end{cases}$$

Alınmış tənliklər sistemindən a, b parametrləri tapılır və empirik düstur qurulur.

3. *Ən kiçik kvadratlar üsulu (Ə.K.K.Ü).* Bu üsulun tətbiq sahələri əvvəlki üsullardan daha genişdir. Əvvəlki üsulların müəyyən çatışmazlıqları vardır. Belə ki, verilənlərin sayı çox olduqda birinci üsulda göstərilən qrafiki qurmaq çətindir və çoxdəyişənli funksiya üçün mümkün deyil. İkinci üsulda isə funksiyanın nəzəri və faktiki qiymətləri arasında mənfi, müsbət qiymətlər bir-birini yox edə bilər, yəni fərq sıfır ola bilər. Bu isə səhv nəticə verir. Tutaq ki, bir dəyişənli asılılıqda $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$ parametrləri iştirak edir.

$$y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_m)$$

Ən kiçik kvadratlar üsulu ilə $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$ parametrləri tapılmalıdır. Ə.K.K.Ü-da

$$Z(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^n (f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i)^2 \rightarrow \min$$

şərtindən parametrlər tapılır. $Z(a_1, a_2, \dots, a_m)$ çoxdəyişənli funksiyasından $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$

parametrlərinə görə xüsusi törəmələr alıb sıfıra bərabər edək.

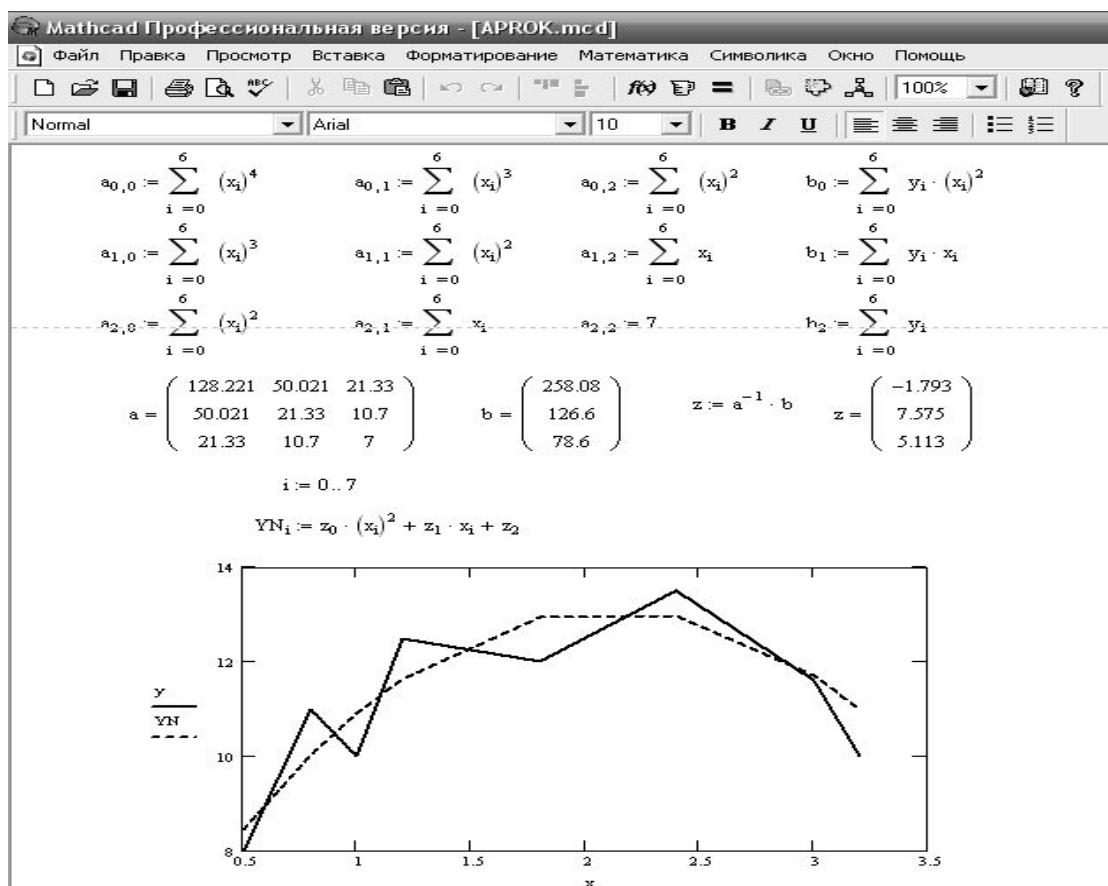
$$\frac{\partial Z(a_1, a_2, \dots, a_m)}{\partial a_i} = 0, (i = 1, 2, \dots, m) \quad (16)$$

Tənliklər sistemini həll edib $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$ parametrləri tapılır. Əgər alınmış tənliklər sistemi $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$ parametrlərinə nəzərən xətti olarsa, onda (16) xətti tənliklər sistemi olacaqdır. Tutaq ki, asılılıq $y = ax^2 + bx + c$ şəklindədir.

$$Z(a, b, c) = \sum_{i=0}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \rightarrow \min \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial a} = 2 \sum_{i=0}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) x_i^2 = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial b} = 2 \sum_{i=0}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) x_i = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial c} = 2 \sum_{i=0}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \sum_{i=0}^n x_i^4 + b \sum_{i=0}^n x_i^3 + c \sum_{i=0}^n x_i^2 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^2 \\ a \sum_{i=0}^n x_i^3 + b \sum_{i=0}^n x_i^2 + c \sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n y_i x_i \\ a \sum_{i=0}^n x_i^2 + b \sum_{i=0}^n x_i + n * c = \sum_{i=0}^n y_i \end{cases}$$

Xətti tənliklər sistemini həll edib parametrlərin qiymətlərini tapıb, kvadratik funksiya nəzərə alsaq, empirik düsturu almış olarıq. Aşağıdakı fraqmentdə a, b və c əmsallarının



tapılması üçün tərtib olunmuş xətti tənliklər sisteminin əmsallarının hesablanması, xətti tənliklər sisteminin həlli (z), nəzəri asılılıq (YN), eyni bir koordinat müstəvisində ilkin verilənlərin (y) və nəzəri asılılığın (YN) qrafikləri qurulmuşdur. Verilənlərə əsasən müəyyən edilmiş nəzəri kvadratik asılılıq aşağıdakı kimi yazılır.

$$YN(x) = -1.793 * x^2 + 7.515 * x + 5.113$$

Tərtib olunmuş hesabat blokundan istifadə edərək ilkin verilənləri hamarlaşdırmaq, qrafikləri qurmaqla kvadratik asılılığa yaxınlığı müəyyən etmək, xətti tənliklər sisteminin əmsallarını hesablamaq və kvadratik asılılığın əmsallarını müəyyən etmək olar. Eyni qayda ilə $y = ax + b$ xətti asılılığın parametrləri tapıla bilər.

Bir çox praktik məsələlərin həllində, xüsusilə iqtisadiyyatda bəzi qeyri xətti asılılıqlardan geniş istifadə olunur. Bu halda qeyri xətti asılılıqlar çevirmələr və əvəzləmələr aparılaraq parametrlərə nəzərən xətti asılılıqlara gətirilir. Aşağıda bəzi asılılıqların çevrilməsi verilmişdir.

1. $y = a * x^b$. Hər iki tərəfi loqarifmləyək. $\ln(y) = \ln(a) + b * \ln(x)$. Əgər $\ln(y) = Y, \ln(a) = A, \ln(x) = X$ işarələməsini aparsaq $Y = A + b * X$ xətti asılılığını alarıq.

2. $y = a * b^x$. Hər iki tərəfi loqarifmləyək. $\ln(y) = \ln(a) + x * \ln(b)$. Əgər $\ln(y) = Y, \ln(a) = A, \ln(b) = B$ işarələməsini aparsaq $Y = A + B * x$ xətti asılılığını alarıq.

3. $y = a + \frac{b}{x}$. $X = \frac{1}{x}$ əvəzləməsini aparsaq $y = a + b * X$ xətti asılılığını alarıq.

4. $y = \frac{1}{a * x + b}$. $Y = \frac{1}{y}$ əvəzləməsini aparsaq $Y = ax + b$ xətti asılılığını alarıq.

5. $y = ab^x c^{x^2}$. Hər iki tərəfi loqarifmləyək. $\ln(y) = \ln(a) + x * \ln(b) + x^2 \ln(c)$
 $\ln(a) = A, \ln(b) = B, \ln(c) = C, \ln(y) = Y$ işarələməsini aparsaq $Y = A + B * x + C * x^2$ kvadratik asılılığını alarıq.

Ən kiçik kvadratlar üsulu ilə alınmış yeni asılılıqlarda parametrlər tapılır və uyğun çevirmələrlə empirik düstur tərtib olunur.

9-cu mövzu

ƏDƏDİ İNTEQRALLAMA VƏ DİFERENSİALLAMA

Məlumdur ki, əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməzdirsə, onda

$$\int_a^b f(x)dx \quad (1)$$

müəyyən inteqralı var və onun qiyməti $F(b) - F(a)$ fərqiə bərabərdir. Burada $F(x)$ inteqralaltı $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdır. Əksər hallarda $F(x)$ ibtidai funksiyasını elementar funksiyalarla göstərmək mümkün olmur. Məsələn:

$$\int_1^2 \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Digər tərəfdən praktik məsələlərin həllində inteqralaltı funksiya çox vaxt cədvəl şəkilində verilir. Ədədi inteqrallamanın əsas mahiyyəti $[a, b]$ parçasında cədvəl şəkilində verilmiş funksiyanın müəyyən inteqralını hesablamaqdan ibarətdir. Müəyyən inteqralın tərifinə görə onun qiyməti tələb olunan dəqiqliklə inteqral cəmin köməyi ilə hesablanıla bilər.

$$n \rightarrow \infty, S_n = \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Müəyyən inteqralın təqribi hesablanması üsulları $f(x)$ inteqralaltı funksiyasının $\varphi(x)$ interpolyasiya çoxhədlisi ilə əvəz edilməsinə əsaslanır. Müəyyən inteqralın təqribi üsullarla hesablanması düsturları kvadratura düsturları adlanır. Tutaq ki,

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \quad (2)$$

inteqralını hesablamaq lazımdır. Burada $p(x)$ $[a, b]$ parçasında müsbət məlum funksiya (çəki funksiyası). Aydındır ki, $f(x) = \varphi(x) + R(x)$ şəkilində göstərilə bilər. Burada $R(x)$ interpolyasiyanın qalıq həddidir. Onda (2) inteqralı

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)\varphi(x)dx + \int_a^b p(x)R(x)dx \quad (3)$$

şəkilində yazıla bilər. (3)-də birinci inteqral ədədi inteqrallama düsturunu, ikinci isə qalıq həddi göstərir. Digər tərəfdən $\varphi(x)$ funksiyası

$$\varphi(x) = \Phi_0(x)f(x_0) + \Phi_1(x)f(x_1) + \dots + \Phi_n(x)f(x_n) \quad (4)$$

şəkilində yazıla bilər. (3)-də (4)-ü nəzərə alıb

$$\int_a^b p(x)\Phi_i(x)dx = c_i$$

işarələməni aparsaq

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx c_0f(x_0) + c_1f(x_1) + \dots + c_nf(x_n) = \sum_{i=0}^n c_i f(x_i)$$

alarıq. Göründüyü kimi c_i -lər $f(x)$ funksiyasından asılı deyil və əvvəlcədən hesablanıla bilər.

$$\int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{i=0}^n c_i f(x_i)$$

fərqi kvadratura düsturlarının qalıq həddi adlanır.

Nyuton-Kotes düsturu

Tutaq ki, $[a, b]$ parçasında $f(x)$ funksiyasının $x_i = x_0 + ih, (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ nöqtələrində $y_i = f(x_i), (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ qiymətləri məlumdur. Bu qiymətlərə əsasən Laqranjin intepolyasiya çoxhədlisini quraq və inteqralaltı funksiyada nəzərə alaq:

$$L_n(x) = L_n(x_0 + qh) = \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} C_n^i}{q-i} f(x_i)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b L_n(x)dx = \int_a^b \left(\frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} C_n^i}{q-i} f(x_i) \right) dx = \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{(-1)^{n-i} C_n^i}{n!} \int_a^b \left(\frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{q-i} \right) dx \end{aligned}$$

$q = \frac{x - x_0}{h}$ olduğundan $dx = h * dq$ olar. $x = x_0$ olduqda $q = 0$ və $x = x_n$ olduqda

$q = n$ qiymətlərini və $\frac{b-a}{n} = h$ olduğunu nəzərə alaq.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx (b-a) \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{(-1)^{n-i} C_n^i}{n!} \int_0^n \left(\frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{q-i} \right) dq \\ H_i &= \frac{(-1)^{n-i} C_n^i}{n!} \int_0^n \left(\frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{q-i} \right) dq \end{aligned} \quad (5)$$

işarələməsini aparsaq

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n f(x_i)H_i \quad (6)$$

düsturunu alırıq. Bu düstur Nyuton- Kotes düsturu adlanır. (5)-də H_i -lər $f(x)$ funksiyasından asılı deyil, interpolyasiyanın düyün nöqtələrinin sayından(n) asılıdır. n-in müxtəlif qiymətlərində bu əmsallar hesablanmış və müxtəlif riyazi sorğu kitablarına daxil edilmişdir. Bu əmsallar Nyuton-Kotes əmsalları adlanır. Nyuton-Kotes düsturunun xüsusi hallarına baxaq.

$$n = 0 \rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(x_0)H_0 \quad (7)$$

$$n = 1 \rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)(f(x_0)H_0 + f(x_1)H_1) \quad (8)$$

$$n = 2 \rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)(f(x_0)H_0 + f(x_1)H_1 + f(x_2)H_2) \quad (9)$$

Düzbucaqlılar düsturu

(7) düsturundan görünür ki, funksiyanın inteqrallama parçasında bir qiyməti verilib. Bu halda $[a,b]$ parçasında $f(x)$ funksiyanın ixtiyari nöqtədə qiymətini götürmək olar. Tutaq ki, funksiyanın $[a,b]$ parçasının orta nöqtəsində $c = 0.5(a+b)$ qiyməti götürülüb.

$$L_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

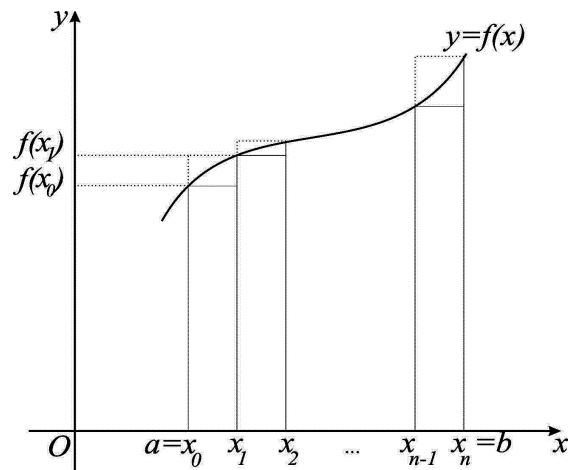
$$\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + R_1 \quad (10)$$

Bu qiymət həndəsi olaraq, oturacağı

$b-a$, hündürlüyü $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ olan düzbucaqlının sahəsidir. Ona görə (10)-a düzbucaqlılar düsturu, $c = a$ olduqda sol, $c = b$ olduqda isə sağ düzbucaqlılar düsturu deyilir.

Qalıq həddi qiymətləndirək. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında iki dəfə differensiallandı. Funksiyanı $c = 0.5(a+b)$ nöqtəsinin yaxın ətrafında Taylor sırasına ayıraq və



Şəkil 6.1.

ikinci tərtib törəmə iştirak edən həddlə kifayətlənək.

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + f''(\xi) \frac{(x-c)^2}{2}$$

Burada yüksək tərtib törəmə iştirak edən həddlərin əvəzinə ikinci tərtib $f''(c)$ törəməsində $c = \xi$ götürülmüşdür.

$$\begin{aligned} R_1 &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(c) dx = \int_a^b f'(c)(x-c) dx + \frac{1}{2} \int_a^b f''(c)(x-c)^2 dx = \\ &= f'(c) \frac{(x-c)^2}{2} \Big|_a^b + \frac{1}{2} f''(c) \frac{(x-c)^3}{3} \Big|_a^b = 0 + \frac{1}{2} f''(\xi) \left[\frac{(b-a)^3}{8} - \frac{(a-b)^3}{8} \right] = \\ &= \frac{1}{6} f''(\xi) 2 \frac{(b-a)^3}{8} = \frac{1}{24} f''(\xi) (b-a)^3 \end{aligned}$$

$[a, b]$ kiçik olduqda (10) düsturundan istifadə olunur. Əks halda $[a, b]$ parçasını n bərabər hissəyə bölüb hər bir parça üçün (10) düsturunu tətbiq edirlər. Tutaq ki, $[a, b]$ parçası $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$, ($i = 0, 1, \dots, n$) bölgü nöqtələri ilə n bərabər hissəyə bölünüb (şəkil 6.1) və bu nöqtələrdə $y_i = f(x_i)$ qiymətləri məlumdur. $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) parçalarına (10) düsturu tətbiq edək və nəticələri cəmləyək. $c = x_i$ götürsək

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} [y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}] + R_1$$

sol düzbucaqlılar, $c = x_{i+1}$ olduqda isə

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} [y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n] + R_1$$

sağ düzbucaqlılar düsturunu alırıq.

Misal. Aşağıdakı

$$S = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^2 e^{-0.5x^2} dx$$

müəyyən inteqralını sol və sağ düzbucaqlılar düsturu ilə hesablayaq. Aşağıdakı fraqmentdə əvvəlcə inteqralaltı $f(x)$ funksiyası, bölgü nöqtələrinin sayı (n), inteqrallama parçasının ucları (a və b) verilmişdir. Verilənlərə görə h addımı və $[a, b]$ parçasında $f(x)$ funksiyasının qiymətləri hesablanmışdır. Riyazi simvollar cədvəlinin köməyi ilə sol və sağ düzbucaqlılar düsturları yazılmışdır. Hər bir düstur ilə hesabat nəticələri əks olunmuşdur.

Mathcad Профессиональная версия - [integral.mcd]

Файл Правка Просмотр Вставка Форматирование Математика Символика

Normal Arial 10 B I

$$f(x) := \left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \right) \cdot e^{-0.5 \cdot x^2}$$

$$n := 600 \quad a := 0 \quad b := 2$$

$$h := \frac{(b - a)}{n}$$

$$i := 0..n$$

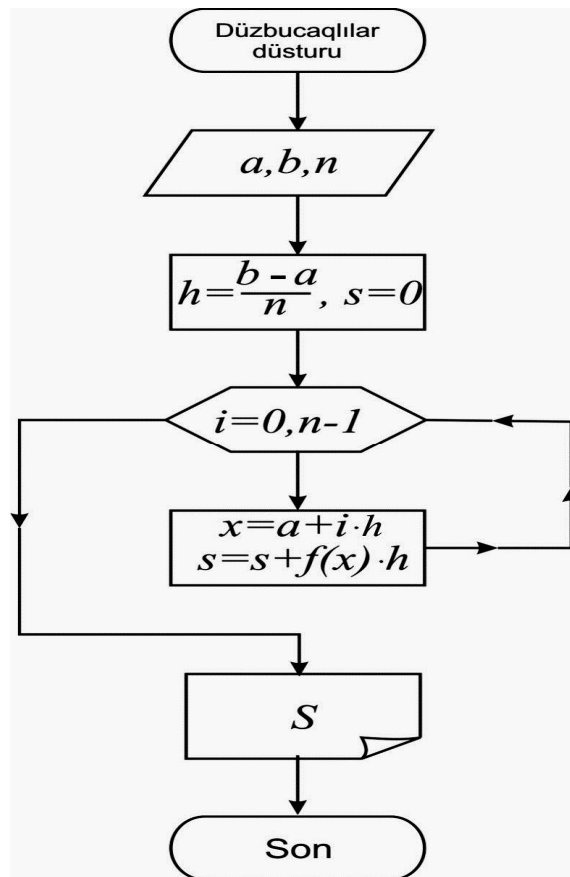
$$x_i := a + h \cdot i$$

$$y_i := f(x_i)$$

$$S_{sol} := h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i \quad S_{sol} = 0.4778246869$$

$$S_{sag} := h \cdot \sum_{i=1}^n y_i \quad S_{sag} = 0.4766748492$$

Sol düzbucaqlılar düsturu ilə hesabat blok sxemi şəkil 6.2-də verilmişdir.



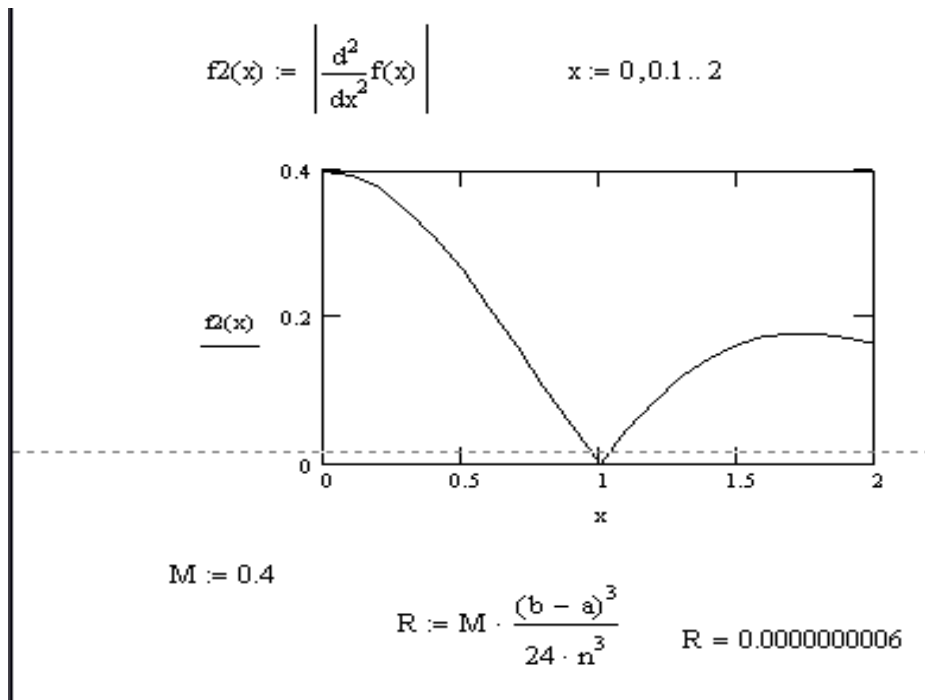
Şəkil 6.2.

Əgər funksiyanın ikinci tərtib törəməsinin $[a, b]$ parçasında ən böyük qiymətini M -lə işarə etsək, qalıq həddini aşağıdakı kimi yazı bilərik.

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$

$$R_1 = \frac{1}{24n^3} f''(\xi)(b-a)^3 \leq \frac{M}{24n^3} (b-a)^3$$

Aşağıdakı fraqmentdə funksiyanın ikinci tərtib törəməsi hesablanmış, onun mütləq qiymətinin qrafiki qurularaq, maksimumu ($M=0.4$) müəyyən olunmuş və xəta (R) qiymətləndirilmişdir.



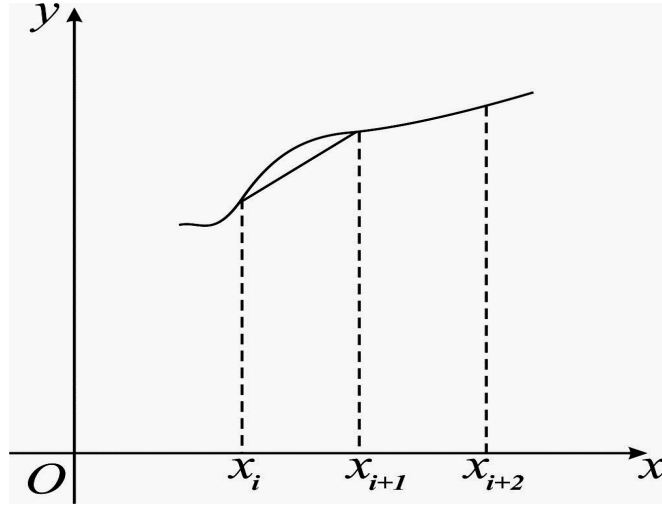
Trapeslər düsturu

(8) düsturundan görünür ki, $[a, b]$ parçasında funksiyanın iki $x_0 = a$ və $x_1 = b$ nöqtələrində qiyməti verilib. (5) –də $n=1, i=0$ və $n=1, i=1$ qiymətlərində H_0 və H_1 əmsallarını hesablayaq.

$$H_0 = \frac{(-1)^{1-0}}{1!} \frac{C_1^0}{1} \int_0^1 \frac{(q-0)(q-1)}{(q-0)} dq = -\frac{(q-1)^2}{2} \Big|_0^1 = -\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Eyni qayda ilə H_1 əmsalını hesablasaq, $H_1 = 0.5$ alarıq. Onda (8) düsturu aşağıdakı şəkildə yazılar.

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)(f(x_0)H_0 + f(x_1)H_1) = \frac{1}{2}(b-a)(f(a) + f(b)) \quad (11)$$



Şəkil 6.3.

Əgər $x_0 = a$ və $x_1 = b$ düyün nöqtələrində Lagranjın bir tərtibli interpolasiya çoxhədlisini yazsaq,

$$L_1(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \quad (12)$$

və onu inteqralladı funksiyada nəzərə alsaq

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b L_1(x) dx = \int_a^b \left(f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) dx = \\ &\left[\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \frac{(x - x_1)^2}{2} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{2}(b - a)(f(a) + f(b)) \end{aligned}$$

nəticənin (11)-lə eyni olduğunu görürük. Əgər $[a, b]$ parçası kiçik deyilsə, onda bu parçanı m bərabər hissəyə bölüb hər bir parçaya (11) düsturunu tətbiq etmək olar. Tutaq ki, verilən parça h addımı ilə m bərabər hissəyə bölünüb.

$$h = \frac{b - a}{m}, x_{i+1} - x_i = h, x_0 = a, x_m = b$$

$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{m-1}, x_m]$ parçalarının (şəkil 6.3) hər birində inteqralladı funksiyanı Lagranjın interpolasiya çoxhədlisi ilə əvəz edib inteqralları (11) düsturu ilə hesablayıb cəmləyək.

$$L_1(x) = f(x_i) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, (i = 0, 1, \dots, m-1)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x) dx \approx$$

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{x_1 - x_0}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{x_2 - x_1}{2}(f(x_1) + f(x_2)) + \dots + \frac{x_m - x_{m-1}}{2}(f(x_{m-1}) + f(x_m)) = \\
&= \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m)) = \\
&= \frac{b-a}{2m} \left(f(x_0) + f(x_m) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) \right) \quad (13) \\
\int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{2m} \left(f(x_0) + f(x_m) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) \right) + R_2(f)
\end{aligned}$$

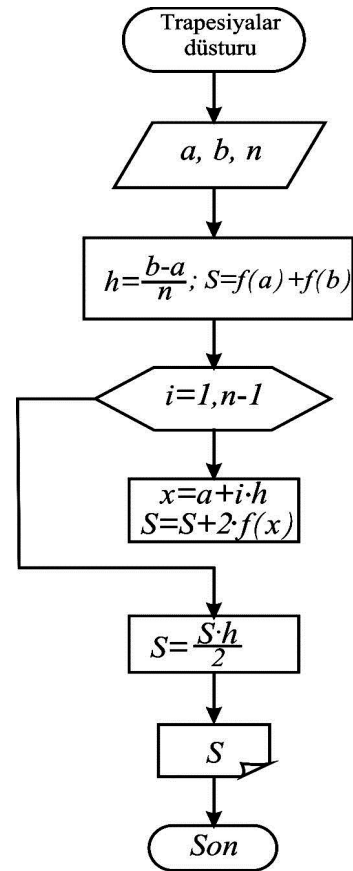
§6.2-də verilmiş inteqralı (13) düsturu ilə hesabət bloku aşağıda verilmişdir.

$$\left| \text{Strap} := \left(\frac{h}{2} \right) \cdot \left(y_0 + y_n + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) \right. \quad \text{Strap} = 0.4772497681$$

Burada inteqrallama addımı, bölgü nöqtələrinin sayı və funksiyanın qiymətləri düzbucaqlılar düsturu ilə aparılmış misaldakı verilənlərlə eynidir.

Trapeslər düsturunda $R_2(f)$ qalıq həddi hesablamaq üçün Laqranjın interpolyasiya düsturunda xətanın ifadəsindən istifadə edək və $x_0 = a$, $x_1 = b$, $h = b - a$ olduğunu nəzərə alaq.

$$\begin{aligned}
R_2(f) &= \int_a^b (f(x) - L_2(x)) dx = \\
&= \int_a^b \left(\frac{f''(\xi)}{2} (x - x_0)(x - x_1) \right) dx = \\
&= \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b [(x - x_0)^2 - h(x - x_0)] dx = \\
&= \frac{f''(\xi)}{2} \left[\frac{(x - x_0)^3}{3} - h \frac{(x - x_0)^2}{2} \right]_a^b = \\
&= \frac{f''(\xi)}{2} \left[\frac{(b - a)^3}{3} - h \frac{(b - a)^2}{2} \right] = \\
&= \frac{f''(\xi)}{2} \left[\frac{(b - a)^3}{3} - \frac{(b - a)^3}{2} \right] = -\frac{f''(\xi)(b - a)^3}{12}
\end{aligned}$$



Şəkil 6.4.

Alınmış düsturu $[a, b]$ parçasının m bərabər hissəyə bölünmüş nər bir $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n$) parçasına tətbiq etsək qalıq hədd aşağıdakı kimi olar:

$$R_2(f) = -\frac{f''(\xi)(b-a)^3}{12m^3}$$

Trapeslər düsturu ilə hesabat blok sxemi şəkil 6.4-də verilmişdir.

Simpson düsturu

Trapeslər düsturunda $[a, b]$ parçasında iki düyün nöqtəsinə görə Laqranjin interpolyasiya çoxhədlisindən istifadə etdik. Aydındır ki, düyün nöqtələrinin sayı artıqca interpolyasiya çoxhədlisi ilə interpolyasiya zamanı xəta azalacaqdır. Nyuton-Kotes düsturunda $n = 2$ götürsək, $[a, b]$ parçası iki bərabər hissəyə bölünər və interpolyasiya addımı $h = \frac{b-a}{2}$ olar. Düyün nöqtələrini $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$ qəbul etsək, (6) düsturu aşağıdakı şəkildə yazılar.

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)(f(x_0)H_0 + f(x_1)H_1 + f(x_2)H_2)$$

olar. H_0, H_1, H_2 əmsallarını hesablayaq.

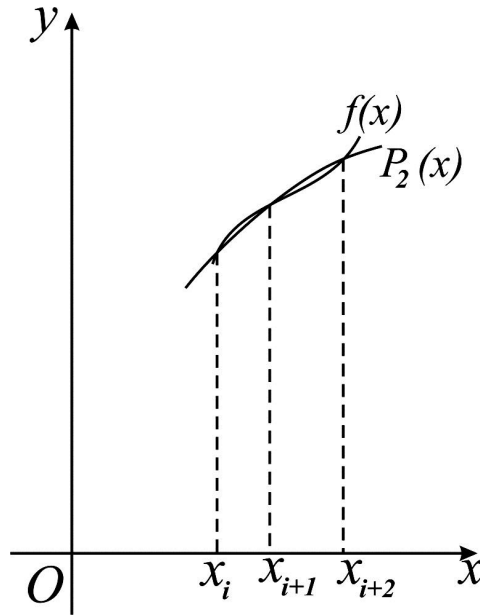
$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{(-1)^{2-0}}{2!} \frac{C_2^0}{2} \int_0^2 \left(\frac{q(q-1)(q-2)}{q} \right) dq = \frac{1}{4} \int_0^2 (q^2 - 3q + 2) dq = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{q^3}{3} - \frac{3q^2}{2} + 2q \right)_0^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{8}{3} - 2 \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Eyni qayda ilə hesabatlar aparsaq $H_1 = \frac{2}{3}, H_2 = \frac{1}{6}$ alarıq. Bu qiymətləri nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx (b-a) \left(\frac{1}{6} f(x_0) + \frac{2}{3} f(x_1) + \frac{1}{6} f(x_2) \right) = \\ &= \frac{b-a}{6} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) = \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Bu düstur Simpson düsturu adlanır. Bu nəticəni inteqralaltı funksiyanı $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$ düyün nöqtələrində Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisi ilə əvəz etməklə də almaq olar.

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) \\
\int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b P_2(x)dx = \int_a^b \left(f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_0-h) \right) dx = \\
&= f(x_0)(b-a) + \frac{\Delta f(x_0)}{h} \frac{(x-x_0)^2}{2} \Big|_a^b + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2} \left(\frac{(x-x_0)^3}{3} - h \frac{(x-x_0)^2}{2} \right) \Big|_a^b = \\
&= \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)
\end{aligned}$$



Şəkil 6.5.

Əgər düzbucaqlılar(10) və trapeslər(11) düsturları ilə müəyyən inteqralın hesablanmasında $[a, b]$ parçası bölünmüşdürsə, Simpson düsturunda verilən parça iki bərabər hissəyə bölündü. Buradan belə bir nəticəyə gəlirik ki, müəyyən inteqralın hesablanmasında dəqiqliyi artırmaq üçün $[a, b]$ parçası cüt sayda $(2m)$ kiçik parçalara bölünməlidir. Bu halda $[x_i, x_{i+2}]$ parçasında (şəkil 6.5) x_i, x_{i+1}, x_{i+2} düyün nöqtələri üçün (14) aşağıdakı kimi yazılar.

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3} (f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})) \quad (15)$$

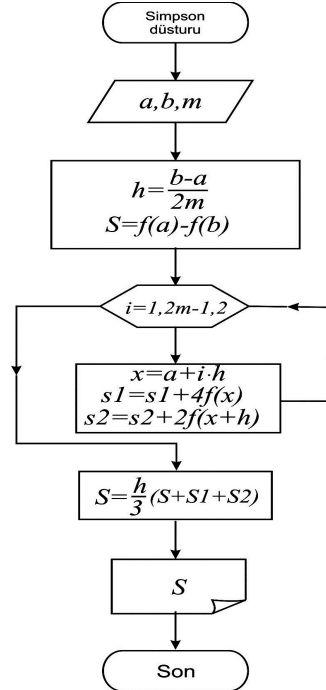
Əgər hər bir $[x_i, x_{i+2}]$ ($i = 0, 2, 4, \dots, 2m-2$) parçası üçün (15) düsturuya yazıb cəmləsək

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m}))$$

düsturunu alırıq. Burada $h = \frac{b-a}{2m}$.

Simpson düsturu ilə hesabat blok sxemi şəkil 6.6-da verilmişdir.

Mathcad sistemində §6.2-də verilmiş inteqral Simpson düsturu ilə hesablanmışdır. Burada inteqrallama addımı, bölgü nöqtələrinin sayı və funksiyanın qiymətləri düzbucaqlılar düsturu ilə aparılmış hesabatlardakı verilənlərlə eynidir.



Şəkil 6.6.

Əvvəlcə funksiyanın $(y_i = f(x_i) \ (i = 1, 2, \dots, 2m-1), \ n = 2m)$ tək və cüt indeksli qiymətlərinin cəmləri ($s1$ və $s2$) hesablanmışdır. Hesablanmış cəmlərdən istifadə edərək Simpson düsturu ilə müəyyən inteqralın qiyməti tapılmışdır. Hesabat bloku aşağıda verilmişdir.

```

i := 1,3..n - 1

s1 := ∑ yi
i
i := 2,4..n - 2
s2 := ∑ yi
i
Ssimp := (h/3) · (y0 + yn + 4 · s1 + 2 · s2)
Ssimp = 0.4772498681

∫02 f(x) dx = 0.4772498681
    
```

Mathcad sistemində müəyyən inteqralın hesabı üçün nəzərdə tutulmuş obyektə istifadə edilərək §6.2-də verilmiş inteqral hesablanmışdır. Sol və sağ düzbucaqlılar, trapeslər və Simpson düsturları ilə müəyyən inteqralın hesablanmış qiymətləri bu qiymətlə müqayisə olunmuşdur. Hesabat nəticələrindən görünür ki, Mathcad sistemindəki nəticələr ilə Simpson düsturu ilə alınmış nəticələr eynidir.

Simpson düsturunun xətası

$$R(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)h^5}{90}$$

düsturu ilə qiymətləndirilir.

10-cu mövzu Ədədi diferensiallama

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında $x_i, y_i = f(x_i), (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ qiymətləri ilə cədvəl şəklində verilib. $[a, b]$ parçasında funksiyanın törəməsi üçün təqribi analitik ifadə tapmaq tələb olunur. Bu halda, yəni funksiyanın törəməsi üçün analitik ifadə məlum olduqda cədvəldə olan $x_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ və cədvəldə olmayan $\forall x \in [a, b]$ nöqtəsində funksiyanın törəməsini hesablamaq olar. Məlumdur ki, $y = f(x)$ funksiyasını

$$f(x) = \varphi(x) + R(x) \quad (16)$$

şəklində göstərmək olar. Burada $\varphi(x)$ interpolasiya çoxhədlisi, $R(x)$ isə interpolasiya düsturunun xətasıdır. (16)-nın hər tərəfinin m tərtib törəməsini tapmaq.

$$f^{(m)}(x) = \varphi^{(m)}(x) + R^{(m)}(x)$$

Funksiyanın m -ci tərtib törəməsi əvəzinə interpolasiya funksiyasının m -ci tərtib törəməsini götürək və fərz edək ki, $R(x)$ funksiyası çox kiçikdir. Yüksək tərtib törəmələr hesablanarkən nəzərə almaq lazımdır ki, $R(x)$ funksiyası çox kiçik olduqda belə, onun yüksək tərtib törəməsi kiçik olmaya bilər. $\varphi(x)$ interpolasiya funksiyası əvəzinə Laqranjin və Nyutonun interpolasiya çoxhədlilərindən istifadə edək.

I $\varphi(x)$ funksiyası kimi, düyün nöqtələri ixtiyari olduqda Nyutonun interpolasiya çoxhədlisini götürək.

$$f(x) \approx \varphi(x) = \varphi(x_0) + [x_0; x_1](x - x_0) + [x_0; x_1; x_2](x - x_0)(x - x_1) + [x_0; x_1; x_2; x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + [x_0; x_1; \dots; x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$$f'(x) \approx \varphi'(x) = [x_0; x_1] + [x_0; x_1; x_2](2x - x_0 - x_1) + [x_0; x_1; x_2; x_3]((x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)) + \dots + [x_0; x_1; \dots; x_n] \sum_{j=0}^{n-1} \left(\prod_{\substack{i \neq j \\ i=0}}^{n-1} (x - x_i) \right)$$

Qalıq həddin törəməsini qiymətləndirək.

$$R'_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \sum_{i=0}^n \left(\prod_{\substack{j \neq i \\ j=0}}^n (x - x_j) \right)$$

Eyni qayda ilə $y = f(x)$ funksiyasının 2-ci, 3-cü, tərtib törəmələri hesablanı bilər.

II. Əgər törəmənin hesablandığı nöqtə $[a, b]$ parçasının əvvəlində yerləşərsə, Nyutonun 1-ci interpolyasiya düsturundan istifadə daha əlverişlidir.

$$f(x) \approx P_n(x) = P_n(x_0 + qh) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} q(q-1)(q-2) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q-1)(q-2)(q-3) \dots (q-n+1)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dq} \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{df(x)}{dq}$$

olduğunu nəzərə alaq.

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \left(\frac{\Delta y_0}{1!} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} (2q-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} (3q^2 - 6q + 2) + \frac{\Delta^4 y_0}{4!} (2q^3 - 9q^2 + 11q - 3) \dots \right)$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + (6q^2 - 18q + 11)\Delta^4 y_0 + \dots)$$

Funksiyanın törəməsini düyün nöqtələrində hesabladıqda bu düsturlar daha da sadələşər ($q=0$).

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{8} + \dots \right)$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + 11\Delta^4 y_0 + \dots)$$

III. Törəmənin qiyməti hesablanan nöqtə $[a, b]$ parçasının sonunda yerləşərsə, Nyutonun 2-ci interpolyasiya düsturundan istifadə daha əlverişlidir.

$$f(x) \approx P_n(x) = P_n(x_0 + qh) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} q(q+1) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!} q(q+1)(q+2) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q+1)(q+2)(q+3) \dots (q+n-1)$$

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} (\Delta y_{n-1} + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} (2q+1) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!} (3q^2 + 6q + 2) + \dots)$$

IV. Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisindən istifadə edərək, funksiyanın törəməsi üçün analitik ifadəni yazaq:

$$f(x) \approx \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} C_n^i}{q-i} f(x_i)$$

$dx = hdq$ olduğunu nəzərə alaq:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} C_n^i}{n!} f(x_i) \frac{d}{dq} \left[\frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{q-i} \right]$$

Törəmənin $x = x_i$ nöqtəsində xətası aşağıdakı düsturla müəyyən olunur:

$$R'_n(x) = (-1)^{n-i} f^{(n+1)}(\xi) h^n \frac{(n-i)! i!}{(n+1)!}$$

$n=2$ olduqda funksiyanın törəməsi və törəmənin xətası üçün ifadələri yazaq:

$$f(x) \approx \frac{1}{2} f(x_0)(q-1)(q-2) - \frac{1}{2} f(x_1)2q(q-2) + \frac{1}{2} f(x_2)q(q-1)$$

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} f(x_0)(2q-3) - f(x_1)(2q-2) + \frac{1}{2} f(x_2)(2q-1) \right)$$

$$x = x_0 \Rightarrow q = 0,$$

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h} (-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)), R'_2(x_0) = \frac{1}{3} h^2 f'''(\xi_0)$$

$$x = x_1 \Rightarrow q = 1,$$

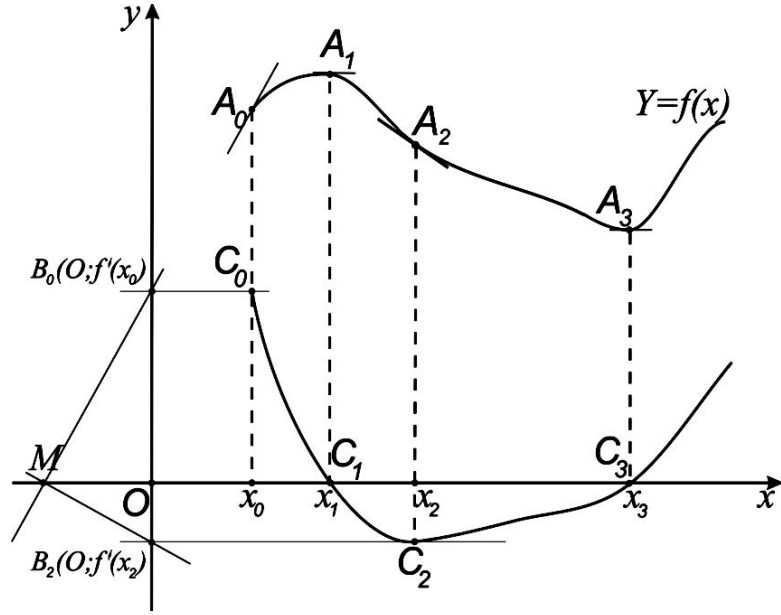
$$f'(x_1) \approx \frac{1}{2h} (-f(x_0) + f(x_2)), R'_2(x_1) = -\frac{1}{6} h^2 f'''(\xi_1)$$

$$x = x_2 \Rightarrow q = 2, f'(x_2) \approx \frac{1}{2h} (f(x_0) + 4f(x_1) + 3f(x_2)), R'_2(x_2) = \frac{1}{3} h^2 f'''(\xi_2)$$

Eyni qayda ilə ikinci, üçüncü və daha yüksək tərtib törəmələr və onların xətalari qiymətləndirilə bilər.

Qrafik şəkildə verilmiş funksiyanın diferensiallanması

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyanının qrafiki verilmişdir. Qrafikdə arqumentin x_0, x_1, x_2, x_3 qiymətlərinə uyğun nöqtələri qeyd edək (A_0, A_1, A_2, A_3). Qeyd olunmuş



Şəkil 6.7.

nöqtələrdə funksiya qrafikinə toxunanlar çəkək (şəkil 6.7). ox oxu üzərində uzunluğu vahidə bərabər OM parçası ayıraq. M nöqtəsindən qrafik üzərində A_0 nöqtəsində çəkilmiş toxunana paralel düz xətt çəkib, onun oy oxu ilə kəsişdiyi $B_0(0, f'(x_0))$ nöqtəsini qeyd edək. oB_0 parçasının uzunluğu qrafiki verilmiş $y = f(x)$ funksiyasının $x = x_0$ nöqtəsində törəməsinin qiymətinə bərabərdir. B_0 nöqtəsindən ox oxuna paralel düz xətt çəkib, $y = x_0$ düz xətti ilə kəsişdiyi $C_0(x_0, f'(x_0))$ nöqtəsini tapaq. Bu qayda ilə C_1, C_2, C_3, \dots nöqtələrini tapıb hamar əyri ilə birləşdirsək verilmiş funksiyanın törəməsinin qrafikini alarıq.

11-ci mövzu

ADİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN TƏQRİBİ ÜSULLARLA HƏLLİ

Əsas anlayışlar

Sərbəst dəyişəni x , axtarılan funksiya $y(x)$ və onun $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ törəmələrinin iştirak etdiyi

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

münasibətinə n tərtibli adi diferensial tənlik deyilir. Qeyd edək ki, bu tənliyə $x, y(x)$ və onun n -ci tərtibdən kiçik, ayrı-ayrı törəmələri daxil olmaya da bilər. Diferensial tənliyə daxil olan ən yüksək tərtibli törəmənin tərtibinə diferensial tənliyin tərtibi deyilir. Əgər (1) tənliyini $y^{(n)}(x)$ -ə nəzərən həll etmək, yəni onu

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

şəklində yazmaq mümkün olarsa, onda axırıncı tənliyə yüksək tərtib törəməyə nəzərən həll olunmuş n tərtib diferensial tənlik deyilir.

$$F(x, y, y') = 0 \quad (3)$$

tənliyi birtərtibli adi diferensial tənlik adlanır. Aydındır ki, $F(x, y, y')$ funksiyası $x, y(x)$ dəyişənlərindən birindən və ya hər ikisindən asılı olmaya da bilər, lakin (3) tənliyinin diferensial tənlik olması üçün $y'(x)$ -dən hökmən asılı olmalıdır.

$$y'(x) = f(x, y) \quad (4)$$

şəklində olan tənliyə törəməyə nəzərən həll olunmuş birtərtibli adi diferensial tənlik deyilir. (3) tənliyində yerinə yazdıqda onu eyniliyə çevirən hər bir $y = \varphi(x)$ funksiyası həmin tənliyin həlli adlanır. Əgər (4) tənliyinin həlli qeyri-əşkar şəkildə verilərsə

$$\Phi(x, y) = 0$$

Onda bu həllə həmin tənliyin inteqralı, $x = x_0$ olduqda $\varphi(x_0) = y_0$ olması şərtinə başlanğıc şərt deyilir. Bu şərt bir çox hallarda aşağıdakı kimi yazılır:

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

Tərif. Birtərtibli diferensial tənliyin ümumi həlli ixtiyari bir C sabitinin daxil olduğu elə bir $y = \varphi(x, C)$ funksiyasına deyilir ki: $a) C$ sabitinin istənilən ədədi qiymətində həmin

funksiya diferensial tənliyi ödəyir; b) istənilən başlanğıc şərti, yəni $y(x_0) = y_0$ götürdükdə, C sabiti üçün elə bir C_0 qiyməti tapmaq olar ki, $y = \varphi(x, C_0)$ həlli həmin başlanğıc şərti ödəsin.

Tərif. $y = \varphi(x, C)$ ümumi həllində C sabitinə müəyyən C_0 qiymətini verməklə alınan $y = \varphi(x, C_0)$ funksiyasına xüsusi həll, $\Phi(x, y, C_0) = 0$ münasibətinə isə diferensial tənliyin xüsusi inteqralı deyilir.

Həndəsi olaraq ümumi həll koordinat müstəvisi üzərində yerləşən və ixtiyari bir sabitdən (C parametrindən) asılı olan əyrilər ailəsindən ibarətdir. Bu əyriyə verilmiş diferensial tənliyin inteqral əyriləri deyilir. Xüsusi həllə bu əyriyədən biri, müstəvinin verilmiş (x_0, y_0) nöqtəsindən keçəni uyğundur.

Koşi məsələsi. Verilmiş $y'(x) = f(x, y)$ tənliyinin $y(x_0) = y_0$ başlanğıc şərtini ödəyən $y = \varphi(x)$ həllinin tapılması məsələsinə Koşi məsələsi deyilir. Həndəsi olaraq Koşi məsələsinin həllini tapmaq müstəvinin (x_0, y_0) nöqtəsindən keçən inteqral əyrisini tapmaq deməkdir.

Əgər (4)-də $f(x, y)$ funksiyası $R\{|x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$ oblastında kəsilməzdirsə, onda (4) tənliyinin x_0 nöqtəsinin $(x_0 - h, x_0 + h)$ ətrafında heç olmazsa bir həlli var. $f(x, y)$ funksiyası

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|$$

Lipşits şərtini ödəyərsə (N - Lipşits sabiti adlanır) onda (4) tənliyinin verilən başlanğıc şərti ödəyən həlli yeganədir. Əksər hallarda (4) tənliyində başlanğıc şərti ödəyən həllini məlum analitik üsullarla tapmaq mümkün olmur. Bu halda təqribi həll üsullarından istifadə olunur. Diferensial tənliyin təqribi həll üsullarını şərti olaraq analitik, qrafik və ədədi üsullar kimi qruplara bölürlər.

Ardıcıl yaxınlaşma (Pikar) üsulu

Tutaq ki, (4) tənliyinin $M(x_0, y_0)$ nöqtəsinin yaxın ətrafında yeganə həlli var və $y(x_0) = y_0$ başlanğıc şərtini ödəyən həlli axtarılır. $x \geq x_0$ oblastında ($x \leq x_0$ oblastında analogi olaraq qurulur.) (4)-ün hər tərəfini x_0 -dan x -ə qədər inteqrallayaq:

$$\int_{x_0}^x y'(x)dx = \int_{x_0}^x f(x, y)dx \Rightarrow y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(x, y)dx$$

Başlanğıc şərti nəzərə alsaq

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y)dx \quad (5)$$

inteqral tənliyini alarıq. Ona görə ki, axtarılan $y(x)$ funksiyası həm də inteqralaltı funksiyada iştirak edir. Aydındır ki, (5) həm (4) tənliyini, həm də başlanğıc şərti ödəyir.

(4) tənliyinin həllini tapmaq üçün ardıcıl yaxınlaşmalar quraq. Birinci yaxınlaşma kimi $y(x) = y_0$ götürək və (5)-də inteqralaltı funksiyada bu qiyməti nəzərə alaq:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0)dx$$

Alınmış $y_1(x)$ yaxınlaşmasını nəzərə alsaq

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1)dx$$

yaxınlaşmasını alarıq. Bu qayda ilə prosesi davam etdirsək

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1})dx$$

ardıcıl yaxınlaşmalarını qura bilərik. Nəzəriyyədən məlumdur ki, inteqralaltı funksiya Lipşits şərtini ödəyərsə, $[x_0, x_0 + h]$ parçasında $y_n(x)$ funksiyaları (4) diferensial tənliyinin qoyulan başlanğıc şərtini ödəyən həllinə müntəzəm yığılır:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$$

Mathcad mühitində müəyyən və qeyri- müəyyən inteqralların hesablanması üçün xüsusi obyektler vardır. Bu obyektlərdən istifadə edərək birtərtibli diferensial tənlik üçün Koşi məsələsinin ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə həllini tapmaq və qrafiklərini qurmaq olar.

Tutaq ki, $y' = f(x, y) := x - y$ diferensial tənliyinin $y(0) = 1$ başlanğıc şərtini ödəyən həllini tapmaq lazımdır. $x=0$, $y_0 = 1$ başlanğıc şərtlərini nəzərə alıb, birinci yaxınlaşmanı tapaq:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0)dx = 1 + \int_0^x (x-1)dx = 1 + \frac{1}{2}x^2 - x$$

Eyni qayda ilə birinci yaxınlaşmanı nəzərə alsaq, ikinci yaxınlaşmanı taparıq:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx = 1 + \int_0^x (x-1 - \frac{1}{2}x^2 + x) dx = 1 - \frac{1}{6}x^3 - x + x^2$$

Bu prosesi davam etdirsək

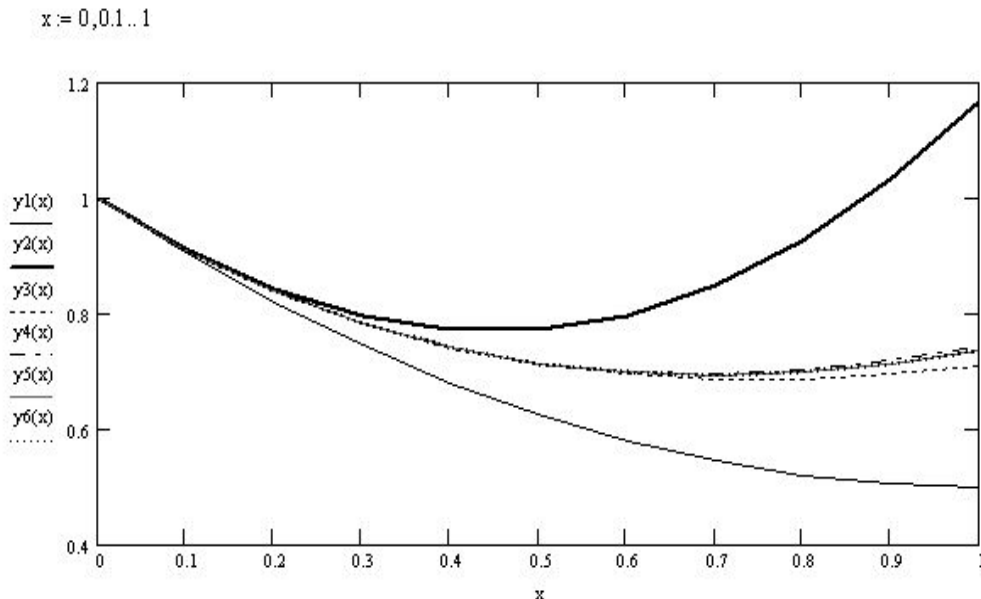
$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_2) dx = 1 + \int_0^x (x-1 + \frac{1}{6}x^3 + x - x^2) dx = 1 - x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

$$y_4(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{120}x^5$$

$$y_5(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{720}x^6$$

$$y_6(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{360}x^6 - \frac{1}{5040}x^7$$

yaxınlaşmalarını alırıq. Bu yaxınlaşmaların ifadələrinin tapılması üçün heç bir proqram tərtibinə ehtiyac yoxdur. Proqramı Mathcad sisteminin özü tərtib edir. Əgər diferensial tənliyin sağ tərəfini dəyişsək, aparılan hesabatlarda dəyişiləcəkdir. Bütün yaxınlaşmaların alınmış ifadələrinin qrafiklərini eyni bir koordinat müstəvisində qurmaq üçün Mathcad sistemində nəzərdə tutulmuş obyektədən istifadə edək. Alınmış yaxınlaşmaların işarələndiyi funksiyaları ordinat oxunda nəzərdə tutulmuş yerdə yazmaq və arqumenti başlanğıc qiymətin yaxın ətrafında kiçik addımla dəyişək.



Qurulmuş qrafiklərdən görünür ki, ardıcıl yaxınlaşmaların sayı artdıqca alınmış yaxınlaşmalar dəqiq həllə yaxınlaşır. Tərtib olunmuş hesabat bloklarından istifadə edərək, başqa diferensial tənliklər də ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə həll edilə bilər. Bunun üçün yalnız diferensial tənliyin sağ tərəfi, $f(x, y)$ -in ifadəsini dəyişmək kifayətdir.

Eyni qayda ilə diferensial tənliklər sistemini ardıcıl yaxınlaşmalar üsulu ilə həll etmək olar.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1(x), y_2(x)) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1(x), y_2(x)) \end{cases}$$

diferensial tənliklər sisteminin

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_1^0 \\ y_2(x_0) = y_2^0 \end{cases}$$

başlanğıc şərtini ödəyən həllini ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə tapmaq üçün aşağıdakı işarələmələri aparaq.

$$Y^{(m)} = \begin{pmatrix} y_1^{(m)} \\ y_2^{(m)} \end{pmatrix} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2) \\ f_2(x, y_1, y_2) \end{pmatrix}$$

$$\int_{x_0}^x f(x, y_1, y_2) dx = \begin{pmatrix} \int_{x_0}^x f_1(x, y_1, y_2) dx \\ \int_{x_0}^x f_2(x, y_1, y_2) dx \end{pmatrix}$$

$$Y^{(m)} = Y_0 + \int_{x_0}^x f(x, Y^{(m-1)}) dx$$

Alınmış düstur ilə ardıcıl yaxınlaşmalar qurularaq diferensial tənliklər sisteminin həllinin təqribi analitik ifadəsi yazılır.

Eyler üsulu

Ardıcıl yaxınlaşma üsulunda hər bir yaxınlaşmada müəyyən inteqrallar hesablanır. Əksər hallarda müəyyən inteqralları dəqiq üsullarla hesablamaq mümkün olmur və təqribi üsullardan istifadə olunur.

Tutaq ki,

$$y'(x) = f(x, y) \quad (6)$$

diferensial tənliyinin $y(x_0) = y_0$ başlanğıc şərtini ödəyən həllini $[a, b]$ parçasında tapmaq tələb olunur. $[a, b]$ parçasını h addımı ilə n bərabər hissəyə bölək:

$$h = \frac{b-a}{n}, x_i = x_0 + ih, (i = 0, 1, 2, \dots)$$

$[x_k, x_{k+1}]$ parçasında (6) tənliyini inteqrallayaq.

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx$$

$$y(x) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx \Rightarrow y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx \quad (7)$$

$[x_k, x_{k+1}]$ parçasında $f(x, y)$ funksiyasının qiymətini sabit, (x_k, y_k) nöqtəsindəki qiymətinə bərabər götürsək (7) aşağıdakı kimi yazılar:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) = y(x_k) + f(x_k, y_k)h \quad (8)$$

(8) (x_k, y_k) nöqtəsində (6) tənliyinin $y(x)$ həllinə çəkilmiş toxunanın tənliyidir. Sanki $[x_k, x_{k+1}]$ parçasında (6) tənliyinin həlli, abisisi x_k olan nöqtədə çəkilmiş toxunana paralel və (x_k, y_k) nöqtəsindən keçən düz xətt parçası ilə əvəz olunur. Nəticədə həllə yaxın sınıq xətləri alırıq ki, bu sınıq xəttə Eylər sınıq xətti deyilir. $x_{k+1} - x_k = h$ olduğunu nəzərə alsaq və sadə işarələmələrdən istifadə etsək, hesabat düsturlarını aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h$$

Misal 1. $y' = \frac{xy}{2}$ diferensial tənliyinin Eylər üsulu ilə $x=0, y(0)=1$ başlanğıc şərtini

ödəyən həllini $[0, 1]$ parçasında $h=0.1$ addımı ilə tapmaq.

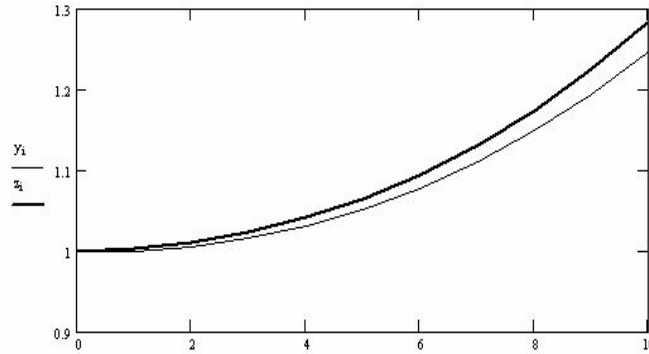
$$\left| \begin{array}{l} f(x, y) := \frac{(x \cdot y)}{2} \quad x_0 := 0 \quad y_0 := 1 \quad h := 0.1 \quad z_0 := 1 \\ \\ i := 1..10 \\ \\ \left(\begin{array}{l} x_i \\ y_i \end{array} \right) := \left(\begin{array}{l} x_{i-1} + h \\ y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) \end{array} \right) \quad z_i := e^{0.25 \cdot (x_i)^2} \end{array} \right.$$

	0
0	0
1	0.1
2	0.2
3	0.3
4	0.4
5	0.5
6	0.6
7	0.7
8	0.8
9	0.9
10	1

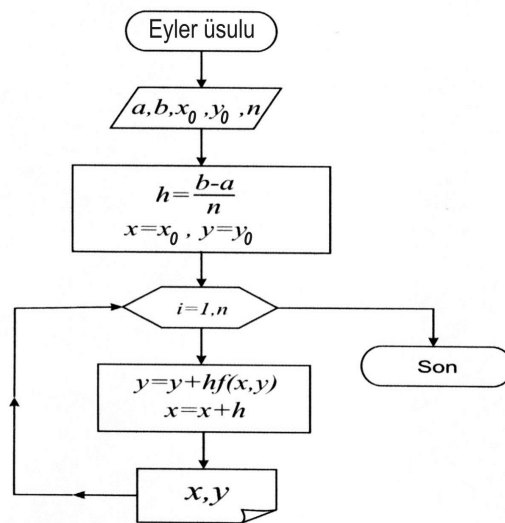
	0
0	1
1	1
2	1.005
3	1.01505
4	1.03027575
5	1.050881265
6	1.0771532966
7	1.1094678955
8	1.1482992719
9	1.1942312427
10	1.2479716487

	0
0	1
1	1.0025031276
2	1.0100501671
3	1.0227550342
4	1.0408107742
5	1.0644944589
6	1.0941742837
7	1.1303191201
8	1.173510871
9	1.2244600851
10	1.2840254167

Verilən diferensial tənliyin başlanğıc şərtini ödəyən dəqiq həlli $z = e^{0.25x^2}$ funksiyasıdır. Tərtib olunmuş hesabat blokunda əvvəlcə ilkin verilənlər, Eylər üsulu ilə hesabat alqoritmi isə sütun vektoru şəkilində yazılmışdır. Müqayisə üçün alınmış təqribi həll ilə yanaşı, dəqiq həllin qiymətləri və aşağıdakı şəkildə qrafikləri verilmişdir.



Qrafikdən görünür ki, dəqiq və təqribi həll arasındakı fərq başlanğıcdan kənarlaşdıqca böyüyür. Eylər üsulu ilə hesabat blok sxemi aşağıda verilmişdir (şəkil 7.1):



Şəkil 7.1.

Eylər üsulu ilə diferensial tənliklər sisteminin təqribi həllini tapmaq mümkündür.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

diferensial tənliklər sisteminin

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_1^0 \\ y_2(x_0) = y_2^0 \end{cases}$$

başlanğıc şərtini ödəyən təqribi həlli aşağıdakı düsturlarla tapılır.

$$\begin{cases} y_1^{(k+1)} = y_1^{(k)} + h * f_1(x_k, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}) \\ y_2^{(k+1)} = y_2^{(k)} + h * f_2(x_k, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}) \end{cases}$$

Misal 2.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{10} \\ \frac{dz}{dx} = x + y + z \end{cases}$$

diferensial tənliklər sisteminin $x=0, y(0)=0, z(0)=1$ başlanğıc şərtini ödəyən həllini $[0,0.8]$ parçasında $h=0.1$ addımı ilə tapaq. Mathcad sistemində tərtib olunmuş hesabat blokunda diferensial tənliklər sisteminin sağ tərəfləri uyğun olaraq $f(x, y, z)$ və $g(x, y, z)$ funksiyaları ilə işarə olunmuş, başlanğıc şərt və Eyley üsulu ilə hesabat alqoritmi yazılmışdır. Hesabat nəticələri x, y və z sütun vektorlarında əks olunmuşdur.

$$f(x, y, z) := \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{10} \quad g(x, y, z) := x + y + z$$

$$x_0 := 0 \quad y_0 := 0 \quad z_0 := 1 \quad h := 0.1$$

$$i := 1..8$$

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{i-1} + h \\ y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}) \\ z_{i-1} + h \cdot g(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}) \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \\ 0.022201 \\ 0.0375143388 \\ 0.0570694019 \\ 0.0822827535 \\ 0.1149482262 \\ 0.1573549699 \\ 0.2124431884 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.1 \\ 1.221 \\ 1.3653201 \\ 1.5356035439 \\ 1.7348708385 \\ 1.9665861977 \\ 2.23473964 \\ 2.543949101 \end{pmatrix}$$

Qeyd edək ki, Eylər üsulunun dəqiqliyi h addımı ilə müəyyən olunur. h addımını kiçik götürdükdə isə hesabların həcmi böyüyür.

Runqe-Kutt üsulu

Tutaq ki, (6) diferensial tənliyinin $y(x_0) = y_0$ başlanğıc şərtini ödəyən həllini $[a, b]$ parçasında tapmaq tələb olunur. Qeyd etdik ki, bu həllin tapılması mustəvinin (x_0, y_0) nöqtəsindən keçən inteqral əyrisini tapmaq deməkdir. $[a, b]$ parçasını h addımı ilə n bərabər hissəyə bölək. Runqe-Kutt üsulunda da Eylər üsulunda olduğu kimi həllin x_k nöqtəsindəki y_k qiyməti y_{k-1} nöqtəsindəki qiymətə əsasən tapılır.

$$y_k = y_{k-1} + \Delta y_{k-1}$$

Əgər axtarılan funksiyanı x nöqtəsinin h ətrafında Teylor sırasına ayırıb, dördüncü tərtib törəməyə qədər hədləri götürsək Δy artımını tapa bilərik:

$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = hy'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x) \quad (9)$$

Burada $y(x)$ funksiyasının törəmələri (6) tənliyini diferensiallamaqla alınır. İsbat olunub ki, Δy_i artımını hesablamaq üçün $f(x, y)$ funksiyasının törəmələrini hesablayıb (9) münasibəti ilə tapmaq əvəzinə bu funksiyanın dörd nöqtədə hesablanmış qiymətlərinə əsasən

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i)$$

düsturu ilə hesablamaqlar aparmaq olar. Burada $k_1^i (i=1,2,3,4)$ əmsalları aşağıdakı düsturlarla hesablanır:

$$k_1^i = hf(x_i, y_i), k_2^i = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^i}{2}\right)$$

$$k_3^i = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^i}{2}\right), k_4^i = hf(x_i + h, y_i + k_3^i)$$

§6.3-dəki misal1 Runqe-Kutt üsulu ilə həll edilmişdir. Mathcad sistemində tərtib olunmuş hesabat blokunda əvvəlcə diferensial tənliyin sağ tərəfi və bölgü nöqtələrinin sayı verilmişdir. $k_1^i (i=1,2,3,4)$ əmsallarının hər birinin hesabat düsturu yazılmışdır. Başlanğıc şərt və Runqe-Kutt üsulunun alqoritmi sütun vektoru şəkilində verilərək dövr qurulmuşdur.

Diferensial tənliyin başlanğıc şərtini ödəyən təqribi həlli (y) və dəqiq həlli (y_1) cədvəl şəkilində əks olunmuşdur. Dəqiq həlli Eylər və Runqe-Kutt üsulları ilə alınmış təqribi həllər ilə müqayisə etsək görərik ki, Runqe-Kutt üsulu ilə alınmış həll, dəqiq həllə daha yaxındır.

$$f(x, y) := \frac{1}{2}x \cdot y \quad h := 0.1 \quad n := 10$$

$$k1(x, y) := h \cdot f(x, y)$$

$$k2(x, y) := h \cdot f(x + 0.5 \cdot h, y + 0.5 \cdot k1(x, y))$$

$$k3(x, y) := h \cdot f(x + 0.5 \cdot h, y + 0.5 \cdot k2(x, y))$$

$$+ k4(x, y) := h \cdot f(x + h, y + k3(x, y))$$

$$k(x, y) := k1(x, y) + 2 \cdot k2(x, y) + 2 \cdot k3(x, y) + k4(x, y)$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad i := 1..n$$

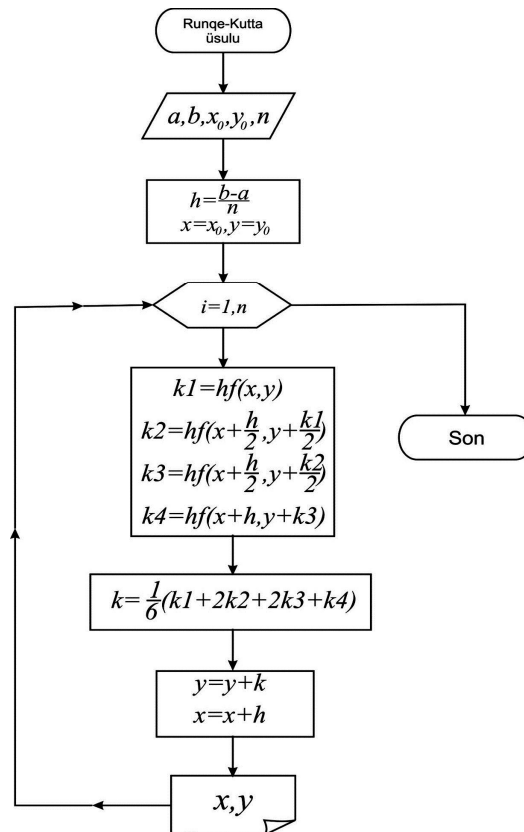
$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} h + x_{i-1} \\ y_{i-1} + \left(\frac{1}{6}\right) \cdot k(x_{i-1}, y_{i-1}) \end{pmatrix}$$

	0
0	0
1	0.1
2	0.2
3	0.3
4	0.4
5	0.5
6	0.6
7	0.7
8	0.8
9	0.9
10	1

	0	1
0		1
1	1.0025	
2	1.01005	
3	1.02276	
4	1.04081	
5	1.06449	
6	1.09417	
7	1.13032	
8	1.17351	
9	1.22446	
10	1.28403	

	0	1
0		1
1	1.0025	
2	1.01005	
3	1.02276	
4	1.04081	
5	1.06449	
6	1.09417	
7	1.13032	
8	1.17351	
9	1.22446	
10	1.28403	

Runqe-Kutt üsulunun hesabat blok sxemi şəkil 7.2-də verilmişdir.



Şəkil 7.2.

Nəzəriyyədən məlumdur ki, yüksək tərtib törəməyə nəzərən həll edilmiş n tərtibli adi diferensial $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ tənliyi əvəzləmələrin köməyi ilə n sayda birtərtibli adi diferensial tənliklər sisteminə gətirilir.

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ \dots\dots\dots \\ y_{n-1}' = F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}). \end{cases}$$

Məsələn, $y'' = f(x, y, y')$ ikitərtibli diferensial tənliyində $y' = z$ qəbul edək. Onda $z' = y''$ olar və aşağıdakı iki birtərtibli tənlikləri alarıq: $y' = z$ və $z' = f(x, y, z)$. Bu halda Koşi məsələsində başlanğıc şərtlər $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$ kimi olur.

Tutaq ki,

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

diferensial tənliklər sisteminin

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_1^0 \\ y_2(x_0) = y_2^0 \end{cases}$$

başlanğıc şərtini ödəyən təqribi həllini tapmaq tələb olunur. Runqe-Kutt üsulu ilə təqribi həll aşağıdakı

$$\begin{cases} y_1^{(i+1)} = y_1^{(i)} + \Delta y_1^{(i)} \\ y_2^{(i+1)} = y_2^{(i)} + \Delta y_2^{(i)} \end{cases}$$

düsturları ilə tapılır. Burada $\Delta y_1^i, \Delta y_2^i, (i=1,2,3,4)$ aşağıdakı kimi hesablanır.

$$\Delta y_1^i = \frac{1}{6}(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i) \quad \Delta y_2^i = \frac{1}{6}(l_1^i + 2l_2^i + 2l_3^i + l_4^i)$$

$$k_1^i = hf_1(x_i, y_1^i, y_2^i),$$

$$l_1^i = hf_2(x_i, y_1^i, y_2^i),$$

$$k_2^i = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_1^i + \frac{k_1^i}{2}, y_2^i + \frac{l_1^i}{2}\right),$$

$$l_2^i = hf_2\left(x_i, y_1^i + \frac{k_1^i}{2}, y_2^i + \frac{l_1^i}{2}\right),$$

$$k_3^i = hf_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_1^i + \frac{k_2^i}{2}, y_2^i + \frac{l_2^i}{2}\right),$$

$$l_3^i = hf_2\left(x_i, y_1^i + \frac{k_2^i}{2}, y_2^i + \frac{l_2^i}{2}\right),$$

$$k_4^i = hf_1(x_i + h, y_1^i + k_3^i, y_2^i + l_3^i).$$

$$l_4^i = hf_2(x_i, y_1^i + k_3^i, y_2^i + l_3^i).$$

Müxtəlif ədəbiyyatlarda

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = mx - y - (x^2 + y^2)x \\ \frac{dy}{dt} = my + x - (x^2 + y^2)y \end{cases}$$

Van-Der-Pol tənliyinin

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

başlanğıc şərtini ödəyən həllinə baxılır. Mathcad sistemində bu tənliyin təqribi həllinin Runqe-Kutt üsulu ilə tapılması üçün hesabat bloku aşağıdakı kimidir.

$m := -0.1$	$h := 0.1$	$n := 400$
$f(t, x, y) := m \cdot x - y - (x^2 + y^2) \cdot x$	$g(t, x, y) := m \cdot y + x - (x^2 + y^2) \cdot y$	

$k1(t, x, y) := h \cdot f(t, x, y)$	$l1(t, x, y) := h \cdot g(t, x, y)$	
$k2(t, x, y) := h \cdot f(t + 0.5 \cdot h, x + 0.5 \cdot k1(t, x, y), y + 0.5 \cdot l1(t, x, y))$	$l2(t, x, y) := h \cdot g(t + 0.5 \cdot h, x + 0.5 \cdot k1(t, x, y), y + 0.5 \cdot l1(t, x, y))$	
$k3(t, x, y) := h \cdot f(t + 0.5 \cdot h, x + 0.5 \cdot k2(t, x, y), y + 0.5 \cdot l2(t, x, y))$	$l3(t, x, y) := h \cdot g(t + 0.5 \cdot h, x + 0.5 \cdot k2(t, x, y), y + 0.5 \cdot l2(t, x, y))$	
$k4(t, x, y) := h \cdot f(t + h, x + k3(t, x, y), y + l3(t, x, y))$	$l4(t, x, y) := h \cdot g(t + h, x + k3(t, x, y), y + l3(t, x, y))$	

$k(t, x, y) := k1(t, x, y) + 2 \cdot k2(t, x, y) + k3(t, x, y) + k4(t, x, y)$	$l(t, x, y) := l1(t, x, y) + 2 \cdot l2(t, x, y) + l3(t, x, y) + l4(t, x, y)$	

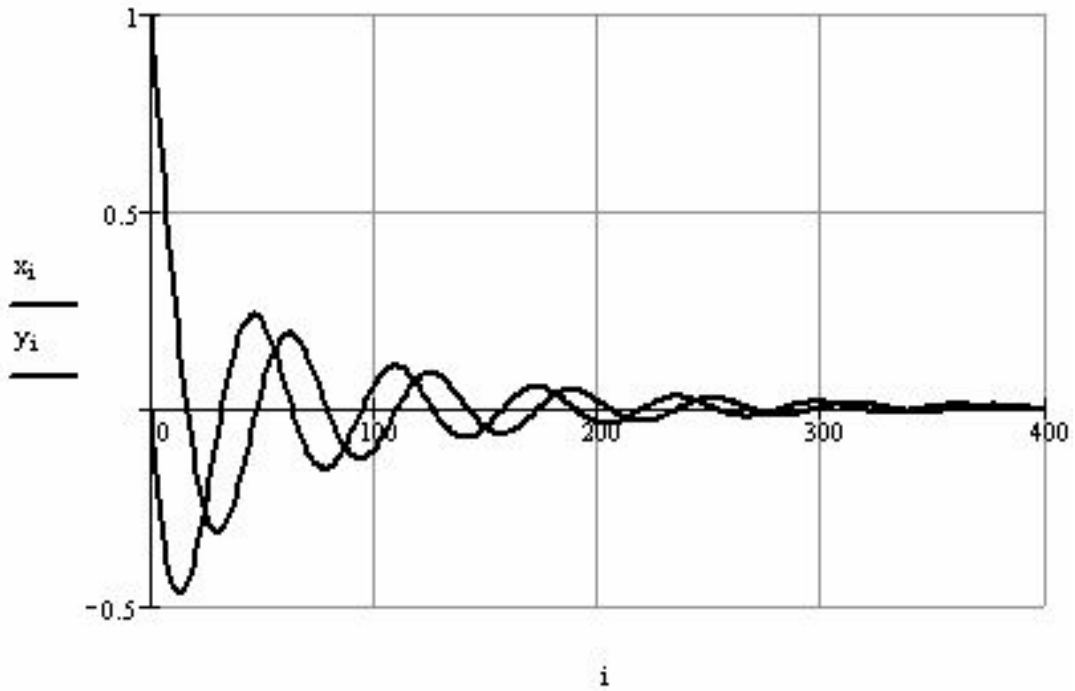
Hesabat blokunda əvvəlcə m -parametri, hesabat addımı (h), hesabat nöqtələrinin sayı (n) diferensial tənliklər sisteminin sağ tərəfləri $f(t, x, y)$ və $g(t, x, y)$ funksiyaları verilmişdir. k_j^i, l_j^i ($j = 1, 2, 3, 4$) əmsalları hesablanmış və diferensial tənliyin həlli üçün başlanğıc şərtlər verilərək dövr qurulmuşdur.

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

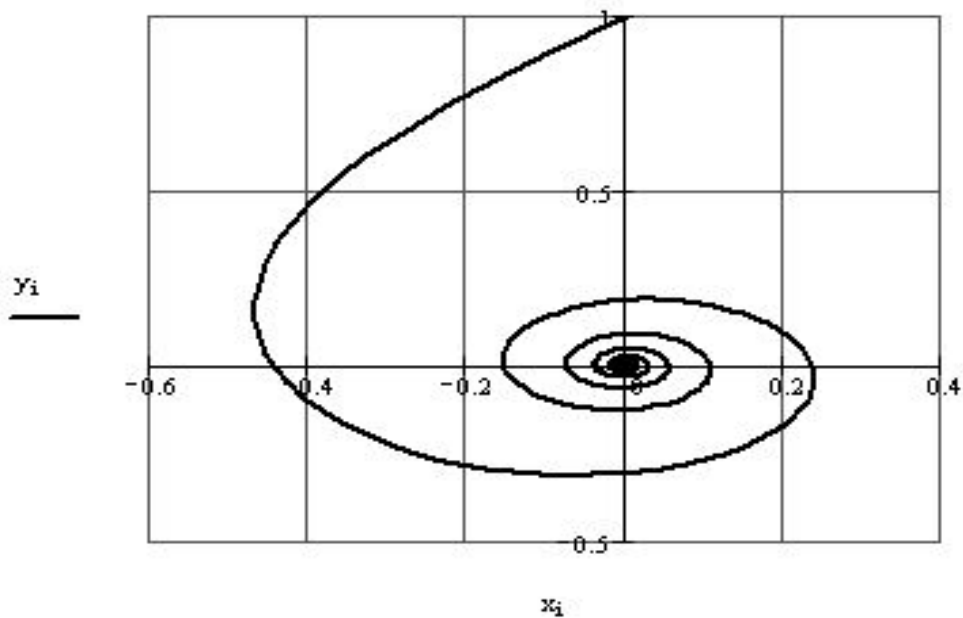
$$i := 1 \dots n$$

$$\begin{pmatrix} t_i \\ x_i \\ y_i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t_{i-1} + h \\ x_{i-1} + \frac{k(t_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1})}{6} \\ y_{i-1} + \frac{l(t_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1})}{6} \end{pmatrix}$$

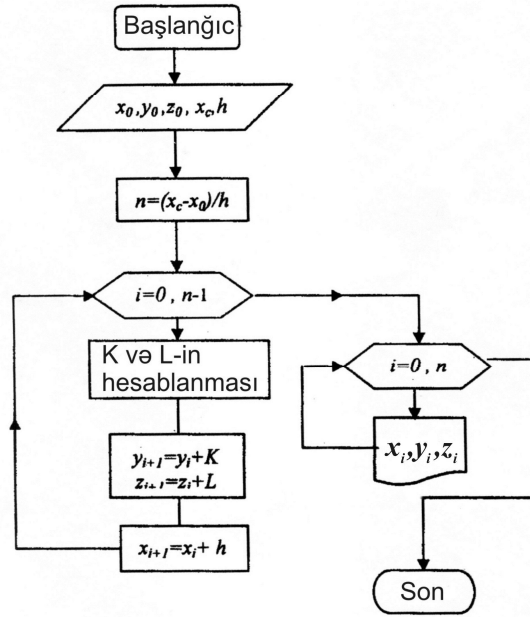
Həllin qrafikləri aşağıdakı kimi olar.



m parametrini dəyişməklə Van-Der-Pol tənliyinin müxtəlif həllərini almaq olar. Bəzi hallarda diferensial tənliyin faza müstəvisində trayektoriyalarını qurmaqla həllin dayanıqlığını tədqiq edirlər. Aşağıdakı fraqmentdə Mathcad sistemində həll faza müstəvisində qurulmuşdur.



Runqe-Kutt üsulunda hesabatlarn çətin olmasına baxmayaraq Eyler üsulu ilə müqayisədə dəqiqlik yüksəkdir və hesalama addımının dördüncü qüvvəti ilə (h^4) müqayisə olunur. Alqoritmin blok-sxemi aşağıdakı kimidir (şəkil 7.3):



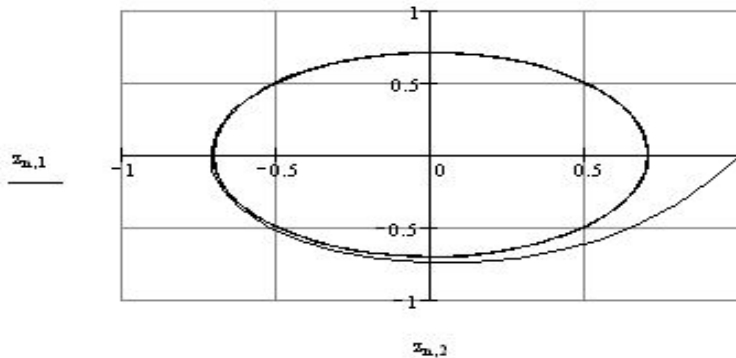
Şəkil 7.3.

Mathcad sistemində diferensial tənliklər sisteminin həlli üçün (Koşi məsələsinin həlli) müxtəlif standart funksiyalar işlənmişdir. Rkfixed (y_0, t_0, t_1, n, d) və Rkadapt (y_0, t_0, t_1, n, d) standart funksiyalarında Runqe-Kutt üsulundan, Bulstoer (y_0, t_0, t_1, n, d) standart funksiyasında isə Bulirşa-Ştera üsulundan istifadə olunub. Bu standart funksiyalarda t_0 sərbəst dəyişənin başlanğıc qiyməti, y_0 axtarılan funksiyanın t_0 anında başlanğıc qiyməti (sütun vektoru şəklində), t_1 -sərbəst dəyişənin son qiyməti, n - hesabat nöqtələrinin sayı, d -diferensial tənliklər sisteminin sağ tərəfi (sütun vektoru şəklində) işarə olunmuşdur. Aşağıda tərtib olunmuş hesabat blokunda Van-Der-Pol tənliyi Rkadapt (y_0, t_0, t_1, n, d) standart funksiyasından istifadə edilərək həll edilmiş və həll faza müstəvisində qurulmuşdur.

$$m := 0.5$$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad d(t, x) := \begin{bmatrix} m \cdot x_0 - x_1 - [(x_0)^2 + (x_1)^2] \cdot x_0 \\ m \cdot x_1 + x_0 - [(x_0)^2 + (x_1)^2] \cdot x_1 \end{bmatrix}$$

$$z := \text{Rkadapt}(x, 0, 20, 100, d) \quad n := 0..99$$



12-ci mövzu Adi diferensial tənlik üçün sərhəd məsələsi

Məlumdur ki, n tərtibli adi diferensial tənliyin ümumi həllində n sayda ixtiyari sabit iştirak edir. Bu sabitlərin bəzi müəyən olunması üçün tənliyin axtarılan həlli və törəmələrinin üzərinə tənliyin tərtibi sayda xətti asılı olmayan şərtlər qoyulur. Ardıcıl yaxınlaşma, Eyer və Runqe-Kutt üsullarında başlanğıc şərti ödəyən həllin tapılmasına (Koşi məsələsi) baxdıq. Bu şərtlərdə sərbəst dəyişenin yalnız bir qiymətində axtarılan funksiya və onun törəmələri üzərinə şərtlər qoyulurdu. Praktiki məsələlərdə adi diferensial tənliyin həllinə arqumentin başlanğıcdan fərqli nöqtələrdə də müəyyən şərtlər qoyulur. Belə şərtlərə sərhəd şərtləri deyilir. Diferensial tənliyin sərhəd şərtlərini ödəyən həllinin tapılmasına sərhəd məsələsi deyilir. Praktikiada çox rast gəlinən bəzi sərhəd şərtlərinə baxaq.

Tutaq ki, ikinci tərtib törəməyə nəzərən həll olunmuş

$$y'' = f(x, y, y') \quad (10)$$

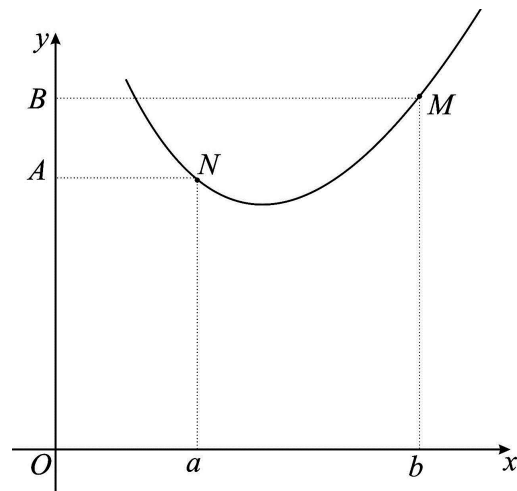
adi diferensial tənliyi verilmişdir.

Misal 1. (10) tənliyinin $[a, b]$ parçasında $y(x)|_{x=a} = A$, $y(x)|_{x=b} = B$ şərtlərini ödəyən həllini tapmaq tələb olunur (şəkil 7.4).

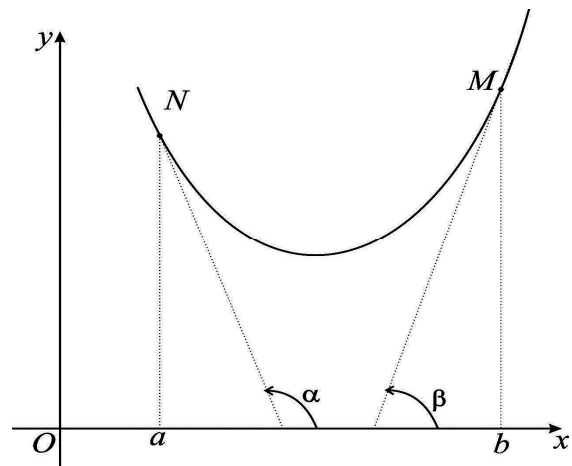
Bu həndəsi olaraq müstəvinin $M(a; A)$ və $N(b; B)$ nöqtələrindən keçən həllin tapılması deməkdir.

Misal 2. (10) tənliyinin $[a, b]$ parçasında $y'(x)|_{x=a} = A$, $y'(x)|_{x=b} = B$ şərtlərini ödəyən həllin tapılması tələb olunur (şəkil 7.5). Bu absisləri $x = a$ və $x = b$ olan nöqtələrdə axtarılan həllə çəkilən toxunanların OX oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaqların $\alpha = \arctg(A)$ və $\beta = \arctg(B)$ olması deməkdir.

Misal 3. (10) tənliyinin $[a, b]$ parçasında $y'(x)|_{x=a} = A$, $y(x)|_{x=b} = B$ şərtlərini ödəyən həllin tapılması tələb olunur (şə-



Şəkil 7.4.



Şəkil 7.5.

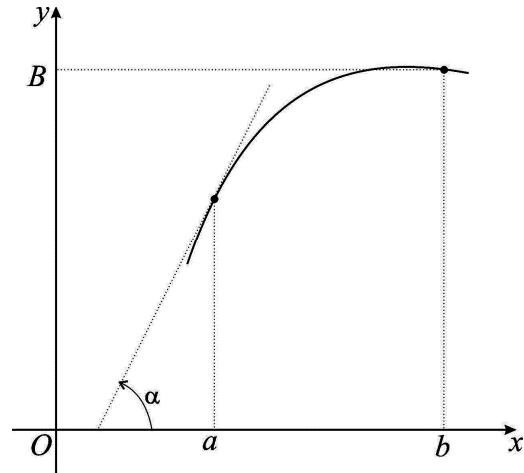
kil 7.6.). Bu müstəvinin M nöqtəsində çəkilən toxunanın bucaq əmsalının A -ya bərabər və $N(b;B)$ nöqtəsindən keçən həllin tapılması deməkdir (Eyni qayda ilə $y(x)|_{x=a}=A$, $y'(x)|_{x=b}=B$ sərhəd şərti izah oluna bilər). Baxılan misallarda şərtlər həllin axtarıldığı parçanın uclarında verilirdi. Bu şərtlərdə parça daxilindəki nöqtələrdə iştirak edə bilər. Məsələn,

$$y''' = f(x, y, y', y'')$$

Diferensial tənliyin $[a, b]$ parçasında

$$y(a) = A, y(b) = B, y'(x_1) = c, x_1 \in [a, b]$$

şərtlərini ödəyən həllin tapılması tələb oluna bilər. Ümumiyyətlə sərhəd şərtləri $[a, b]$ parçasında yerləşən $x_k (k = 1, 2, \dots, m)$ nöqtələrində axtarılan həllin və onun törəmələrinin qiyməti iştirak etdiyi (diferensial tənliyin tərtibi sayda) xətti asılı olmayan qeyri-xətti tənliklər sistemi şəklində verilə bilər.



Şəkil 7.6.

$$G_i(y(x_1), y'(x_1), y''(x_1), \dots, y(x_m), y'(x_m), y''(x_m)) = 0, (i = 1, 2, 3)$$

Əgər bu şərt axtarılan funksiya və onun törəmələrinə görə xətti olarsa, belə sərhəd şərtləri xətti adlanır.

Xətti sərhəd məsələsi

(10) tənliyi və qoyulan sərhəd şərtləri xətti olduqda məsələyə xətti sərhəd məsələsi deyilir. n tərtibli adi diferensial tənlik ümumi şəkildə

$$\begin{aligned} L[y] &= p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y \\ L[y] &= f(x) \end{aligned}$$

kimi yazılır. Burada $p_i(x) (i = 0, 1, \dots, n)$ və $f(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında kəsilməzdir.

Fərz edək ki, sərhəd şərtlərində yalnız $x = a$ və $x = b$ absisləri iştirak edir. Belə məsələ ikinöqtəli sərhəd məsələsi adlanır. Ümumi halda ikinöqtəli xətti sərhəd məsələsi

$$\begin{aligned} R_j[y] &= \gamma_j, (j = 1, 2, \dots, n) \\ R_j[y] &= \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{ij} y^{(i)}(a) + \beta_{ij} y^{(i)}(b)) \end{aligned}$$

şəklində yazılır. $\gamma_j = 0, (j = 1, 2, \dots, n)$ olduqda sərhəd şərtləri bircins, əks halda isə qeyri

bircins sərhad şərtləri adlanır. Burada γ_j, α_{ij} və $\beta_{ij} (j=1,2,\dots,n)$ verilən sabit ədədlərdir. $n=2$ olduqda γ_j, α_{ij} və $\beta_{ij} (j=1,2)$ sabitlərinin müəyyən qiymətlərində yuxarıda verilmiş misallardakı sərhad şərtlərini almaq olar.

İkitərtibli xətti diferensial tənlik üçün ikinöqtəli xətti sərhad məsələsi

İkitərtibli adi diferensial tənliyin başlanğıc şərtlərini ödəyən təqribi həllinin tapılması üsullarından istifadə edərək, sərhad məsələsinin təqribi həllini tapmaq olar. Tutaq ki, ikitərtibli xətti qeyri-bircins

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (11)$$

diferensial tənliyinin xətti qeyri-bircins ikinöqtəli

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = s_1 \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = s_2 \end{cases} \quad (12)$$

sərhad şərtini ödəyən həlli axtarılır. Burada $p(x), q(x)$ və $f(x)$ kəsilməz funksiyalardır. $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 (|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0), s_1, s_2$ verilmiş sabit ədədlərdir. (11) - (12) məsələsinin həllini

$$y = cu(x) + v(x) \quad (13)$$

şəklində axtaraq. Burada $u(x)$

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0 \quad (14)$$

bircins tənliyinin sıfırdan fərqli həlli, $v(x)$ isə

$$v'' + p(x)v' + q(x)v = f(x) \quad (15)$$

qeyri bircins tənliyin həllidir. Aydındır ki, (13)-lə müəyyən olunan funksiya (11) tənliyini ödəyəcəkdir. İxtiyari c sabiti üçün (13)-ün (12) sərhad şərtinin birincisini ödəməsinə baxaq.

$$\alpha_0 (cu(a) + v(a)) + \alpha_1 (cu'(a) + v'(a)) = s_1 \Rightarrow$$

$$c(\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a)) + \alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a) = s_1 \quad (16)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0 \\ \alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a) = s_1 \end{cases} \quad (17)$$

(17) bərabərlikləri ödəndikdə ixtiyari c üçün (16) şərti ödənəcək. Əgər

$$u(a) = k\alpha_1, u'(a) = -k\alpha_0, k \neq 0 \quad (18)$$

və

$$v(a) = \frac{s_1}{\alpha_0}, v'(a) = 0, \alpha_0 \neq 0 \quad (19)$$

götürsək (17) bərabərlikləri ödənər. Buradan alınır ki, $u(x)$ funksiyası (14) bircins tənliyinin (18) başlanğıc şərtini ödəyən həlli, $v(x)$ funksiyası isə (15) qeyri -bircins tənliyinin (19) başlanğıc şərtini ödəyən həllidir. (18) və (19) münasibətləri ilə $u(a), u'(a), v(a), v'(a)$ -nın seçilməsi, (16) və (17) şərtlərinin ödənməsi deməkdir. Deməli, ixtiyari c sabiti üçün $y = cu(x) + v(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasının $x = a$ ucunda (12) sərhəd şərtinin birinci tənliyinin ödənməsini təmin edir. c sabitini elə seçək ki, (13) funksiyası (12) sərhəd şərtinin ikinci tənliyini ödəsin.

$$\beta_0(cu(b) + v(b)) + \beta_1(cu'(b) + v'(b)) = s_2 \Rightarrow$$

$$c(\beta_0u(b) + \beta_1u'(b)) + \beta_0v(b) + \beta_1v'(b) = s_2$$

$$c = \frac{s_2 - (\beta_0v(b) + \beta_1v'(b))}{\beta_0u(b) + \beta_1u'(b)},$$

$$\beta_0u(b) + \beta_1u'(b) \neq 0 \quad (20)$$

Deməli (11)-(12) sərhəd məsələsi (14)-(18) və (15)-(19) kimi iki Koşi məsələsinə gətirildi. Qeyd edək ki, (20) şərti ödəndikdə (11)-(12) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var. (14)-(18) və (15)-(19) məsələlərini təqribi üsullarla həll edib, $u(x)$ və $v(x)$ funksiyalarının cədvəl qiymətlərinə görə c sabitinin qiyməti nəzərə alınmaqla (11)-(12) sərhəd məsələsinin həllinin cədvəlini almaq olar.

Sonlu fərqlər üsulu

Tutaq ki, (11) - (12) sərhəd məsələsinin $[a, b]$ parçasında təqribi həllini tapmaq tələb olunur. $[a, b]$ parçasını h addımı ilə n bərabər hissəyə bölək:

$$h = \frac{b-a}{n}, x_i = x_0 + ih, (i = 0, 1, 2, \dots, n), x_0 = a, x_n = b.$$

Bu parçada kəsilməz olan $p(x), q(x)$ və $f(x)$ funksiyalarının bölgü nöqtələrində qiymətlərini

$$p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), f_i = f(x_i)$$

işarə edək. (11) - (12) sərhəd məsələsinin həlli $y(x)$ funksiyasını və onun törəmələrini x_i

bölgü nöqtələrində qiymətlərini y_i, y_i' və y_i'' ilə işarə edib, sonlu fərqlərlə ifadə edək:

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$y_i'' \approx \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{h^2} = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2}, (i = 1, 2, \dots, n-2) \quad (21)$$

$x = x_0 = a$ və $x = x_n = b$ nöqtələrində isə birinci tərtib törəmələri

$$y_0' \approx \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y_n' \approx \frac{y_{n-1} - y_n}{-h}, \quad (22)$$

düsturları ilə əvəz edək. (21) düsturlarını (11)-də;

$$\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + q_i y_i = f_i, (i = 0, 1, 2, \dots, n-2)$$

(22) düsturlarını isə (12)-də nəzərə alsaq

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = s_1$$

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = s_2$$

xətti tənliklər sistemi alırıq. Bu xətti tənliklər sistemində $y_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ dəyişənlərinin və tənliklərin sayı $n + 1$ -dir. Alınmış tənliklər sistemini sadələşdirək:

$$\begin{cases} (1 - hp_i + h^2 q_i) y_i + (hp_i - 2) y_{i+1} + y_{i+2} = h^2 f_i, (i = 0, 1, \dots, n-2) \\ (h\alpha_0 - \alpha_1) y_0 + \alpha_1 y_1 = h s_1 \\ -\beta_1 y_{n-1} + (h\beta_0 + \beta_1) y_n = h s_2 \end{cases} \quad (23)$$

$n = 5$ götürsək (23) tənliklər sisteminin birinci dörd tənliyi aşağıdakı şəkildə

$$(1 - hp_0 + h^2 q_0) y_0 + (hp_0 - 2) y_1 + y_2 = h^2 f_0 \quad i = 0$$

$$(1 - hp_1 + h^2 q_1) y_1 + (hp_1 - 2) y_2 + y_3 = h^2 f_1 \quad i = 1$$

$$(1 - hp_2 + h^2 q_2) y_2 + (hp_2 - 2) y_3 + y_4 = h^2 f_2 \quad i = 2$$

$$(1 - hp_3 + h^2 q_3) y_3 + (hp_3 - 2) y_4 + y_5 = h^2 f_3 \quad i = 3$$

axırıncı iki tənlik isə

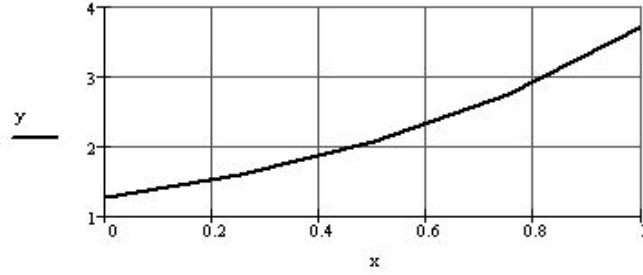
$$(h\alpha_0 - \alpha_1) y_0 + \alpha_1 y_1 = h \cdot s_1$$

$$-\beta_1 y_4 + (h\beta_0 + \beta_1) y_5 = h \cdot s_2$$

şəklində yazılar. Mathcad sistemində diferensial tənlik üçün sərhəd məsələsinin həllini misalla izah edək. Tutaq ki,

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x$$

diferensial tənliyinin



Qurulmuş qrafikdən görünür ki, alınmış təqribi həll diferensial tənlik üçün qoyulmuş sərhəd şərtini ödəyir. Əgər sərhəd şərtlərini daha ümumi şəkildə

$$\begin{cases} \alpha_{00}y(a) + \alpha_{01}y'(a) + \beta_{00}y(b) + \beta_{01}y'(b) = s_1 \\ \alpha_{10}y(a) + \alpha_{11}y'(a) + \beta_{10}y(b) + \beta_{11}y'(b) = s_2 \end{cases}$$

yazıb, (22) düsturlarını nəzərə alsaq (23) tənliklər sisteminin yalnız axırındakı iki tənliyi dəyişəcəkdir.

$$\begin{cases} (h\alpha_{00} - \alpha_{01})y_0 + \alpha_{01}y_1 + \beta_{00}y_{n-1} + (h\beta_{00} + \beta_{01})y_n = h \cdot s_1 \\ (h\alpha_{10} - \alpha_{11})y_0 + \alpha_{11}y_1 - \beta_{11}y_{n-1} + (h\beta_{10} + \beta_{11})y_n = h \cdot s_2 \end{cases} \quad (24)$$

Bəzi hallarda dəqiqliyi artırmaq məqsədi ilə (21) düsturları əvəzinə

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, y''_i \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

düsturlarından istifadə edirlər. Onda ümumi şəkildə (24) sərhəd şərtlərini nəzərə alsaq, (23) tənliklər sisteminin əvəzinə aşağıdakı tənliklər sistemini alarıq:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h} + q_i y_i = f_i, (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ (h\alpha_{00} - \alpha_{01})y_0 + \alpha_{01}y_1 + \beta_{00}y_{n-1} + (h\beta_{00} + \beta_{01})y_n = h \cdot s_1 \\ (h\alpha_{10} - \alpha_{11})y_0 + \alpha_{11}y_1 - \beta_{11}y_{n-1} + (h\beta_{10} + \beta_{11})y_n = h \cdot s_2 \end{cases}$$

Əksər hallarda xətti sərhəd məsələsinin həllində qovma üsulundan istifadə olunur.

Qovma üsulu

Sonlu fərqlər üsulu ilə sərhəd məsələsinin həlli xətti tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. (23) tənliklər sisteminin əsas matrisinin elementlərinin hesablanması müəyyən qanuna-uyğunluq var. n böyük olduqda xətti tənliklər sisteminin həlli vaxt aparıcı olduğundan onun həlli üçün xüsusi üsul işlənmişdir. Bu üsul qovma üsulu adlanır. (11)-(12) məsələsində fərz edək ki, $p(x), q(x)$ və $f(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında kəsilməzdir. Sonlu fərqlər üsulunda olduğu kimi $[a, b]$ parçasını n bərabər hissəyə bölüb, bölgü nöqtələ-

rində sonlu fərqlərdən istifadə edərək, sonlu-fərq tənliklərini yazaq:

$$\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + q_i y_i = f_i, (i = 0, 1, 2, \dots, n-2)$$

$hp_i - 2 = m_i$, $1 - hp_i + h^2 q_i = n_i$, $(i = 0, 1, 2, \dots, n-2)$ işarələmələrini aparsaq, sonlu fərq tənlikləri aşağıdakı şəkildə yazılar:

$$n_i y_i + m_i y_{i+1} + y_{i+2} = h^2 f_i, (i = 0, 1, \dots, n-2) \quad (25)$$

(25)-də y_{i+1} dəyişənini tapaq:

$$\left\{ y_{i+1} = \frac{h^2 f_i}{m_i} - \frac{n_i}{m_i} y_i - \frac{1}{m_i} y_{i+2}, (i = 0, 1, \dots, n-2) \right. \quad (26)$$

Tutaq ki, (26) tənliklərindən y_i dəyişənləri yox edilib. Onda (26) tənliklərini ümumi şəkildə aşağıdakı kimi yazıla bilər.

$$y_{i+1} = c_i (d_i - y_{i+2}) \quad (27)$$

c_i və d_i əmsallarını tapaq. $i = 0$ olduqda (26)-dan və birinci sərhəd şərtindən aşağıdakıları yazıla bilər:

$$y_1 = \frac{h^2 f_0}{m_0} - \frac{n_0}{m_0} y_0 - \frac{1}{m_0} y_2, y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - h s_1}{\alpha_1 - h \alpha_0}$$

$$y_1 = \frac{h^2 f_0}{m_0} - \frac{n_0}{m_0} \cdot \frac{\alpha_1 y_1}{\alpha_1 - h \alpha_0} + \frac{n_0}{m_0} \cdot \frac{h s_1}{\alpha_1 - h \alpha_0} - \frac{1}{m_0} y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{\alpha_1 - h \alpha_0}{m_0 (\alpha_1 - h \alpha_0) + n_0 \alpha_1} \left(\frac{h s_1 n_0}{\alpha_1 - h \alpha_0} + h^2 f_0 - y_2 \right)$$

$$\text{Burada } c_0 = \frac{\alpha_1 - h \alpha_0}{m_0 (\alpha_1 - h \alpha_0) + n_0 \alpha_1} \quad d_0 = \frac{h s_1 n_0}{\alpha_1 - h \alpha_0} + h^2 f_0 \quad (28)$$

işarələmələrini aparsaq, $y_1 = c_0 (d_0 - y_2)$ alırıq. $y_i = c_{i-1} (d_{i-1} - y_{i+1})$ münasibətini (26)-da nəzərə alsaq

$$y_{i+1} = \frac{h^2 f_i}{m_i} - \frac{n_i c_{i-1} d_{i-1}}{m_i} + \frac{n_i c_{i-1}}{m_i} y_{i+1} - \frac{1}{m_i} y_{i+2} \Rightarrow$$

$$(m_i - n_i c_{i-1}) y_{i+1} = h^2 f_i - n_i c_{i-1} d_{i-1} - y_{i+2} \Rightarrow$$

$$y_{i+1} = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}} (h^2 f_i - n_i c_{i-1} d_{i-1} - y_{i+2}) \text{ alırıq.}$$

$$c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}} \quad \text{və} \quad d_i = h^2 f_i - n_i c_{i-1} d_{i-1} \quad , (i=1,2,\dots,n-2) \quad (29)$$

işarələmələrini aparsaq, $y_{i+1} = c_i(d_i - y_{i+2})$ münasibətini alarıq. (28)-i nəzərə almaqla (29) düsturlarının köməyi ilə c_i və d_i ($i=1,2,\dots,n-2$) əmsallarını hesablaya bilərik. Bu əmsalların hesablanması düz gediş adlanır. (27)-də $i=n-2$ götürüb, sərhəd şərtlərinin ikinci tənliyindən istifadə edərək y_n dəyişənini tapa bilərik.

$$y_{n-1} = c_{n-2}(d_{n-2} - y_n) \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = s_2 \Rightarrow y_n = \frac{hs_2 + \beta_1 c_{n-2} d_{n-2}}{h\beta_0 + \beta_1 + \beta_1 c_{n-2}}$$

Tapılmış y_n dəyişəninin bu qiymətində, c_{n-2} və d_{n-2} əmsallarının hesablanmış qiymətlərinə görə $y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3}, \dots, y_1$ qiymətlərini və $y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - hs_1}{\alpha_1 - h\alpha_0}$ qiymətini hesablaya bilərik.

$y_i, (i=n, n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ qiymətlərinin hesablanması tərs gediş adlanır.

§6.5.3-də baxılan sərhəd məsələsinin qovma üsulu ilə Mathcad sistemində həllini aşağıdakı hesabat bloku ilə yerinə yetirmək olar.

$$\begin{array}{l} n := 4 \quad a := 0 \quad b := 1 \\ h := \frac{(b - a)}{n} \quad p(x) := -2 \cdot x \quad \alpha 0 := 1 \quad \alpha 1 := -1 \quad s1 := 0 \\ f(x) := -4 \cdot x \quad q(x) := -2 \quad \beta 0 := 1 \quad \beta 1 := 0 \quad s2 := 3.718 \\ \hline i := 0..n \\ x_i := a + i \cdot h \\ m_i := h \cdot p(x_i) - 2 \quad n_i := 1 - h \cdot p(x_i) + q(x_i) \cdot h^2 \\ c_0 := \frac{(\alpha 1 - h \cdot \alpha 0)}{[m_0 \cdot (\alpha 1 - h \cdot \alpha 0) + n_0 \cdot \alpha 1]} \quad d_0 := f(x_0) \cdot h^2 + \frac{(h \cdot s1 \cdot n_0)}{\alpha 1 - h \cdot \alpha 0} \\ i := 1..2 \\ c_i := \frac{1}{(m_i - n_i \cdot c_{i-1})} \quad d_i := f(x_i) \cdot h^2 - n_i \cdot c_{i-1} \cdot d_{i-1} \\ c = \begin{pmatrix} -0.769 \\ -0.738 \\ -0.704 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.063 \\ -0.177 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1.273 \\ 1.591 \\ 2.069 \\ 2.742 \\ 3.718 \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesabat nəticəsində düz gedişin nəticələri c və d sütun vektorlarında əks olunmuşdur. Bu nəticələrə görə tərs gediş yerinə yetirilmiş sərhəd şərtini ödəyən təqribi həllin (y) cədvəli alınmışdır.

Mövzu 13

İKİTƏRTİBLİ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR.

Əsas anlayışlar

Fizika və mexanikanın bir çox məsələlərinin tədqiqində riyazi modellər xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunur. Ümumiyyətlə adi diferensial tənliklərdə olduğu kimi xüsusi törəməli diferensial tənliklərin də çox az hallarda dəqiq həllini analitik üsullarla tapmaq olur. Ona görə də bu tip məsələlərin həlli üçün müxtəlif təqribi üsullar işlənmişdir. Sadəlik üçün iki dəyişənli funksiyanın iştirak etdiyi xüsusi törəməli xətti diferensial tənliyə baxaq. Əgər xüsusi törəməli diferensial tənlik axtarılan funksiya və onun törəmələrinə nəzərən xəttidirsə, onda bu tənliyə xətti xüsusi törəməli diferensial tənlik deyilir. Ümumi halda iki dəyişənli ikitərtibli xətti xüsusi törəməli diferensial tənlik aşağıdakı kimi yazılır:

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + cu = f(x, y) \quad (1)$$

Burada $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y$ -lə axtarılan $u(x, y)$ funksiyanın x və y dəyişənlərinə nəzərən birinci və ikinci tərtib törəmələri işarə olunmuşdur. Fərz edək ki, (1) tənliyində iştirak edən $A(x, y), B(x, y), C(x, y), a(x, y), b(x, y), c(x, y)$ və $f(x, y)$ iki dəyişənli funksiyaları müəyyən qapalı oblastda kəsilməzdirlər. (1) tənliyini eyniliyə çevirən $z = u(x, y)$ funksiyası üç ölçülü fəzədə səthi təsvir edir. Bu səthə inteqral səthi deyilir. Əgər (1) tənliyində əmsallar sabit ədədlər olarsa, onda tənlik sabit əmsallı xüsusi törəməli diferensial tənlik adlanır.

$$D = AC - B^2$$

tənliyin diskriminantı adlanır. Diskriminant tənliyin tipini müəyyən edir və ixtiyari cırılaşmayan çevirmədə tənliyin tipi dəyişmir. (1) tənliyi $D > 0$ olduqda elliptik, $D = 0$ olduqda parabolik, $D < 0$ olduqda isə hiperbolik tip tənlik adlanır. Qeyd etdik ki, əksər fiziki proseslər xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə xarakterizə olunur. Məsələn, stasionar rejimdə, yəni əlavə istilik mənbəyi olmadıqda istiliyin yayılması aşağıdakı tənliklə xarakterizə olunur:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

Burada $u = u(x, y)$ funksiyası lövhənin (x, y) nöqtəsinin temperaturunu xarakterizə edir. Bu tənlikdə $A = 1, B = 0, C = 1$ olduğunu nəzərə alsaq $D = 1 > 0$ olar. Bu tənliyin tipi elliptikdir və Laplas tənliyi adlanır.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

operatoru Laplas operatoru adlanır. Laplas tənliyi çox vaxt $\Delta u = 0$ kimi yazılır. Kəsilməz törəmələri olan $u(x, y)$ funksiyası G oblastında Laplas tənliyini ödəyirsə, bu funksiyaya harmonik funksiya deyilir.

$$u_1(x, y) = ax + by + c, u_2(x, y) = xy, u_3(x, y) = x^2 - y^2$$

$$u(x, y) = c_1 u_1(x, y) + c_2 u_2(x, y) + c_3 u_3(x, y)$$

funksiyalarının hər biri (2) tənliyini ödədiyindən harmonik funksiyaadır. Qeyri-bircins Laplas tənliyi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = f(x, y) \quad (3)$$

Puasson tənliyi adlanır. Bu tənlik stasionar olmayan proseslərdə, yəni əlavə istilik mənbəyi olduqda istiliyin paylanması xarakterizə edir. Aydındır ki, (3) tənliyi elliptikdir.

İstilikkeçirmə və diffuziya məsələlərinin riyazi modeli əksər hallarda

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

tənliyi ilə yazılır. $A = 0, B = 0, C = -a^2$ olduğunu nəzərə alsaq, $D = 0$ olar. Tənliyin tipi parabolikdir. Bu tənliyə istilikkeçirmə tənliyi deyilir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$A = 0, B = 0, C = 1$ və $D = 0$ olduğundan tənliyin tipi parabolikdir. Tənliyin həlli (integral səth) $u = y\varphi(x) + \psi(x)$ kimi yazıla bilər. Burada $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ ixtiyari bərdəyişənli funksiyalardır.

Fizikada əksər rəqs prosesləri

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

tənliyi ilə xarakterizə olunur. $A = 1, B = 0, C = -a^2$ və $D < 0$ olduğundan tənlik hiperbolik tiptir. Bu tənliyə adətən simin rəqs tənliyi də deyilir.

Xüsusi törəməli diferensial tənliklərin ümumi halda sonsuz sayıda həlli var. Əgər tənlik hər hansı fiziki prosesi xarakterizə edərsə, birqiymətli həll üçün əlavə şərtlər qoyulmalıdır.

$$A(dy)^2 - 2Bdx dy + C(dx)^2 = 0$$

diferensial tənliyi (1) – in xarakteristik tənliyi adlanır. Hiperbolik tənliyin iki həqiqi

$\varphi(x, y) = c_1$, $\psi(x, y) = c_2$, parabolik tənliyin bir həqiqi $\varphi(x, y) = c$, elliptik tənliyin isə iki xəyali xarakteristika ailəsi vardır $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = c_1$, $\varphi(x, y) - i\psi(x, y) = c_2$. Bu xarakteristikalar məlum olduqda xüsusi törəməli diferensial tənliyi kanonik şəklə gətirmək olar.

Elliptik tənlik üçün sərhəd şərtləri

Müxtəlif stasionar fiziki proseslərin tədqiqi əksər hallarda aşağıdakı elliptik tip tənliyin həllinə gətirilir.

$$L[u] = \Delta u + au_x + bu_y + cu = f(x, y) \quad (4)$$

Həllin prosesi birqiymətli, düzgün xarakterizə etməsi üçün müəyyən sərhəd şərtləri verilməlidir. Qeyd etmək lazımdır ki, bu tip tənliklər üçün Koşi məsələsinin həllinə baxılmır, çünki alınmış həll ola bilər ki, korrekt olmasın.

Ona görə də elliptik tənliklər üçün əksər hallarda sərhəd məsələlərinin həllinə baxırlar.

Tutaq ki, $a(x, y), b(x, y), c(x, y), f(x, y)$ kəsilməz funksiyalardır.

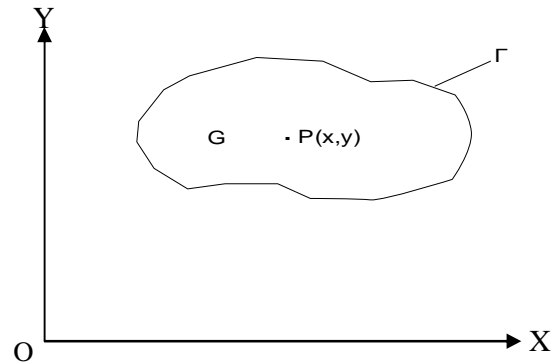
1-ci sərhəd məsələsi. Tutaq ki, G oblastının sərhəddi Γ əyrisi (şəkil 8.1) boyunca kəsilməz $\varphi(P) = \varphi(x, y)$ funksiyası verilmişdir. Elə $u(p) = u(x, y)$ funksiyası axtarılır ki, G oblastının daxili nöqtələrində (4) tənliyini ödəsin, Γ əyrisi boyunca isə qiyməti verilən $\varphi(P) = \varphi(x, y)$ funksiyasına bərabər olsun. Yəni aşağıdakı şərtlər ödənsin.

$$\begin{aligned} L[u(P)] &= f(P), P \in G \\ u(P) &= \varphi(P), P \in \Gamma \end{aligned}$$

2-ci sərhəd məsələsi. Tutaq ki, Γ əyrisi ilə hüdudlanmış G oblastında kəsilməz $\varphi_1(p)$ funksiyası verilmişdir. Elə $u(p) = u(x, y)$ funksiyası axtarılır ki, G oblastının daxili nöqtələrində (4) tənliyini ödəsin, Γ əyrisi boyunca isə funksiyanın n normalı istiqaməti üzrə törəməsi, verilən $\varphi_1(p)$ funksiyasına bərabər olsun. Yəni aşağıdakı şərtlər ödənsin.

$$\begin{aligned} L[u(P)] &= f(P), P \in G \\ \frac{\partial u(P)}{\partial n} &= \varphi_1(P), P \in \Gamma \end{aligned}$$

3-cü sərhəd məsələsi. Tutaq ki, G oblastının sərhəddi Γ əyrisi boyunca kəsilməz $\psi(P) = \psi(x, y)$ funksiyası verilmişdir. Elə $u(p) = u(x, y)$ funksiyası axtarılır ki,



Şəkil 8.1.

$$L[u(P)] = f(P), P \in G$$

$$\alpha_0 u(P) + \alpha_1 \frac{\partial u(P)}{\partial n} = \psi(P), P \in \Gamma$$

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$$

şərtləri ödənsin. $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0$ olduqda üçüncü sərhəd məsələsindən birinci sərhəd məsələsi, $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$ olduqda isə ikinci sərhəd məsələsi alınır. Qeyd edək ki, G oblastı məhdud olduqda sərhəd məsələsi daxili, əks halda isə xarici sərhəd məsələsi adlanır. Laplas tənliyi üçün birinci sərhəd məsələsi Dirixle məsələsi, ikinci sərhəd məsələsi Neyman məsələsi, üçüncü sərhəd məsələsi isə qarışıq məsələ adlanır. Nəzəriyyədən məlumdur ki, Dirixle məsələsi korrektdir. Yəni $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$ sərhəd şərtləri Γ əyrisi boyunca

$$|\varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)| < \varepsilon$$

şərtini ödədikdə uyğun $u_1(x, y), u_2(x, y)$ həlləri

$$|u_1(x, y) - u_2(x, y)| < \varepsilon$$

şərtini ödəyir.

Laplas tənliyinin sonlu fərqlərlə yazılışı

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv u_{xx} + u_{yy} \equiv \Delta u = 0$$

Laplas tənliyini sonlu fərqlərlə yazmaq üçün $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ xüsusi törəmələrinin sonlu fərqlərlə ifadəsini Laplas tənliyində nəzərə almaq lazımdır.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2}$$

olduğunu nəzərə alsaq aşağıdakı münasibəti alarıq.

$$\frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} + \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2} = 0$$

Burada sadələşdirmələr aparıb $u(x, y)$ -i tapaq.

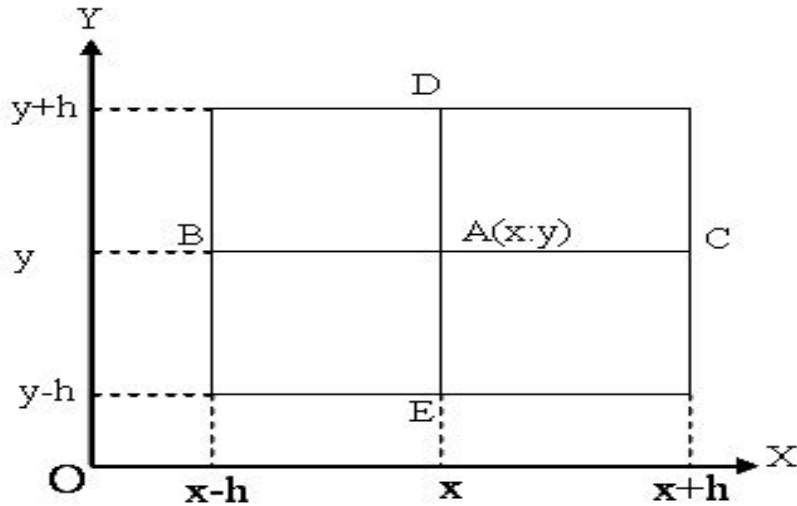
$$u(x, y) = \frac{1}{4}(u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h)) \quad (5)$$

Alınmış bu düsturda xətanı qiymətləndirmək mümkün deyil. Xətanı qiymətləndirmək üçün əvvəlcə sonlu fərq tənliklərinin başqa üsullarla çıxarılışına baxaq. Funksiyanın Teylor sırasına ayrılışını yazaq.

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right) f(x, y) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^2 f(x, y) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n f(x + \theta h, y + \theta k), 0 < \theta < 1 \quad (6)$$

Birinci əsas sxem. (6) ayrılışından istifadə edərək $A(x, y), B(x-h, y), C(x+h, y), D(x, y+h), E(x, y-h)$ nöqtələrində funksiyanın Teylor sırasına ayrılışına baxaq və ayrılışda dördüncü tərtib törəməyə qədər hədləri götürək ($n=4$). Bu nöqtələr (şəkil 8.2) görüldüyü kimi kvadratın simmetriya mərkəzi və tərəflərinin orta nöqtələridir.



Şəkil 8.2.

Funksiyanın $B(x-h, y), C(x+h, y), D(x, y+h), E(x, y-h)$ nöqtələrində qiymətlərini $A(x, y)$ nöqtəsində funksiyanın və törəmələrinin qiymətləri ilə ifadə edək.

$$u(x-h, y) = u(x, y) - hu_x + \frac{1}{2!} h^2 u_{xx} - \frac{1}{3!} h^3 u_{xxx} + \frac{1}{4!} h^4 \bar{u}_{xxxx}$$

$$u(x+h, y) = u(x, y) + hu_x + \frac{1}{2!} h^2 u_{xx} + \frac{1}{3!} h^3 u_{xxx} + \frac{1}{4!} h^4 \bar{u}_{xxxx}$$

$$u(x, y-h) = u(x, y) - hu_y + \frac{1}{2!} h^2 u_{yy} - \frac{1}{3!} h^3 u_{yyy} + \frac{1}{4!} h^4 \bar{u}_{yyyy}$$

$$u(x, y+h) = u(x, y) + hu_y + \frac{1}{2!} h^2 u_{yy} + \frac{1}{3!} h^3 u_{yyy} + \frac{1}{4!} h^4 \bar{u}_{yyyy}$$

Burada $u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xxx}, u_{yyy}$ $A(x, y)$ nöqtəsində funksiyanın və törəmələrinin qiymətləridir.

$\bar{u}_{xxxx}, \bar{u}_{yyyy}, \tilde{u}_{xxxx}, \tilde{u}_{yyyy}$ aralıq nöqtədə (məsələn \bar{u}_{xxxx} B və A-nöqtələrini birləşdirən düz xətt parçası üzərində götürülmüş müəyyən nöqtədə) funksiyanın törəmələrinin qiymətləridir. Funksiyanın $B(x-h, y), C(x+h, y), D(x, y+h), E(x, y-h)$ nöqtələrində qiymətlərini toplasaq aşağıdakı münasibəti alarıq.

$$u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) = 4u(x, y) + h^2(u_{xx} + u_{yy}) + R_h(x, y)$$

Burada qalıq hədd

$$R_h(x, y) = \frac{h^4}{4!} (\bar{u}_{xxxx} + \bar{u}_{yyyy} + \bar{u}_{xyxy} + \bar{u}_{xxyy})$$

$O(h^4)$ ilə qiymətləndirilir. Buradan

$$(u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h)) = 4u(x, y) + h^2 \Delta u + O(h^4)$$

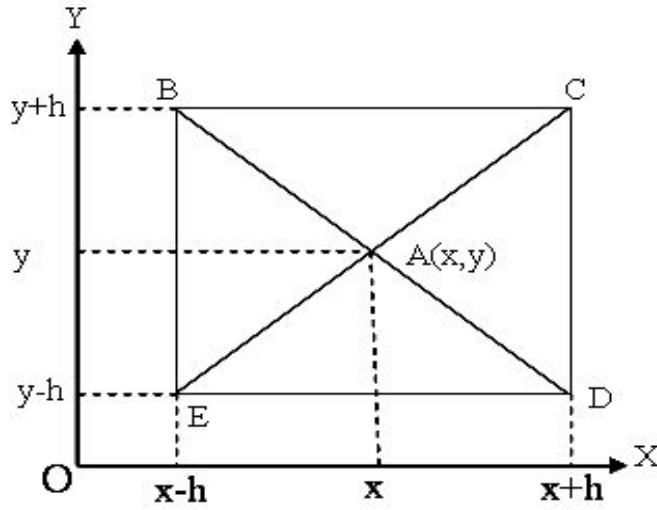
münasibətini, nəticədə isə

$$\Delta u = \frac{1}{h^2} (u(x-h, y) + u(x+h, y) + u(x, y-h) + u(x, y+h) - 4u(x, y)) + O(h^2)$$

düsturunu alırıq. Bu düstur Laplas operatorunun əsas sonlu fərq forması adlanır. $O(h^2)$ həddini sonsuz kiçik hesab edib, $\Delta u = 0$ olduğunu nəzərə alaq. Nəticədə Laplas tənliyinin sonlu fərqlərlə aproksimasiyasını, yəni (5)-i alırıq.

İkinci əsas sxem. Aşağıdakı nöqtələrdə funksiyanın Teylor sırasına ayrılışına baxaq ($n=4$). Bu nöqtələr (şəkil 8.3) kvadratın simmetriya mərkəzi və təpə nöqtələridir.

$$A(x, y), B(x-h, y+h), C(x+h, y+h), D(x+h, y-h), E(x-h, y-h)$$



Şəkil 8.3.

Teylor düsturundan istifadə edərək, funksiyanın

$$B(x-h, y+h), C(x+h, y+h), D(x+h, y-h), E(x-h, y-h)$$

nöqtələrində qiymətlərini, $A(x, y)$ nöqtəsində funksiyanın və törəmələrinin qiymətləri ilə ifadə edək.

D nöqtəsində:

$$\begin{aligned} u(x+h, y-h) &= u(x, y) + h(u_x - u_y) + \frac{1}{2!} h^2 (u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy}) + \\ &+ \frac{1}{3!} h^3 (u_{xxx} - 3u_{xxy} + 3u_{xyy} - u_{yyy}) + \frac{1}{4!} h^4 \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 u(\xi_1, \eta_1) \end{aligned}$$

E nöqtəsində:

$$u(x-h, y-h) = u(x, y) + h(-u_x - u_y) + \frac{1}{2!}h^2(u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy}) + \frac{1}{3!}h^3(-u_{xxx} - 3u_{xxy} - 3u_{xyy} - u_{yyy}) + \frac{1}{4!}h^4\left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u(\xi_2, \eta_2)$$

B nöqtəsində:

$$u(x-h, y+h) = u(x, y) + h(-u_x + u_y) + \frac{1}{2!}h^2(u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy}) + \frac{1}{3!}h^3(-u_{xxx} + 3u_{xxy} - 3u_{xyy} + u_{yyy}) + \frac{1}{4!}h^4\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u(\xi_3, \eta_3)$$

C nöqtəsində:

$$u(x+h, y+h) = u(x, y) + h(u_x + u_y) + \frac{1}{2!}h^2(u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy}) + \frac{1}{3!}h^3(u_{xxx} + 3u_{xxy} + 3u_{xyy} + u_{yyy}) + \frac{1}{4!}h^4\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u(\xi_4, \eta_4)$$

Alınmış münasibətləri tərəf-tərəfə toplayaq.

$$u(x+h, y-h) + u(x-h, y-h) + u(x-h, y+h) + u(x+h, y+h) = 4u(x, y) + 2h^2\Delta u + O(h^4)$$

Buradan Δu üçün aşağıdakı ifadəni alırıq.

$$\Delta u = \frac{1}{2h^2}(u(x+h, y-h) + u(x-h, y-h) + u(x+h, y+h) + u(x-h, y+h) - 4u(x, y)) + O(h^2)$$

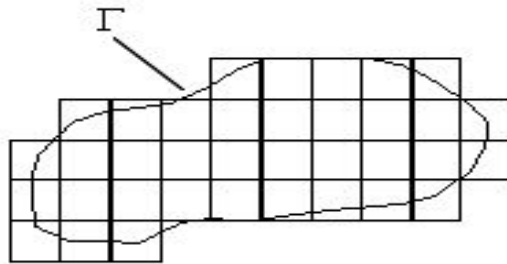
$O(h^2)$ həddini kiçik hesab edərək atsaq, $\Delta u = 0$ Laplas tənliyini aşağıdakı sonlu fərq tənliyi ilə əvəz edə bilərik.

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(u(x+h, y-h) + u(x-h, y-h) + u(x-h, y+h) + u(x+h, y+h))$$

Mövzu 14 Dirixle məsələsinin şəbəkə üsulu ilə həlli

İki dəyişənli ikitərtibli xüsusi törəməli diferensial tənlik üçün sərhəd məsələsini şəbəkə (sonlu fərqlər) üsulu ilə təqribi həlli, üç mərhələ ilə yerinə yetirilir.

1. Müstəvi üzərində həllin axtarıldığı G oblastına kifayət qədər yaxın G_n (şəkil 8.4) şəbəkəsi qurulur.



Şəkil 8.4.

2. Verilən diferensial tənlik G_n şəbəkəsinin təpə nöqtələrində sonlu fərq tənlikləri ilə əvəz olunur.

3. G oblastı üzrə sərhəddəki verilən sərhəd şərtlərindən istifadə edərək, axtarılan həllin G_n şəbəkəsinin sərhəddə yaxın düyün nöqtələrində qiymətləri müəyyən edilir. Dirixle məsələsinin şəbəkə üsulu ilə həllinə baxaq.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

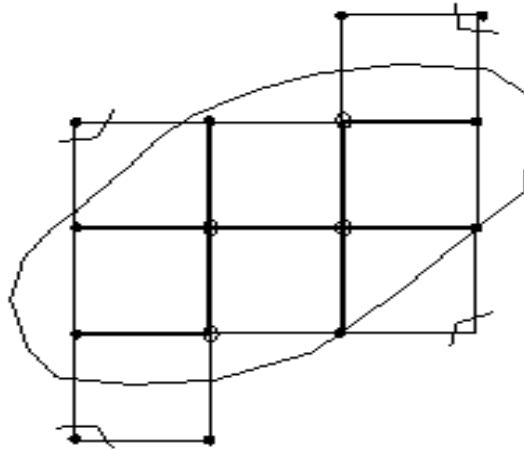
Elə kəsilməz $u(p) = u(x, y)$ funksiyası axtarılır ki, $(x, y) \in G$ oblastında verilən tənliyi ödəsin, sərhəddə isə verilən $\varphi(p)$ funksiyasına bərabər olsun. Yəni

$$u(P) = \varphi(P), P \in \Gamma$$

şərti ödənsin. Sadəlik üçün G oblastını düzbucaqlı şəkilində götürək və h addımı ilə bu oblastı kiçik kvadratlara bölək. Nəticədə təpə nöqtələrinin koordinatları (x_i, y_j) olan kvadratlar alarıq.

$$x_i = x_0 + ih, y_j = y_0 + jh, (i, j = 0 \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

Ümumiyyətlə h addımını elə seçmək olar ki, G oblastının sərhəddi olan Γ əyrisi şəbəkənin təpə nöqtələrinə daha yaxın olsun (şəkil 8.5).



Şəkil 8.5.

Aydındır ki, şəbəkənin təpə nöqtələrindən G oblastından kənar qalanları olacaqdır. Şəbəkənin təpə nöqtələri təsnif edilir. Əgər təpə nöqtəsinin qonşuluğunda heç olmazsa bir daxili təpə nöqtəsi varsa, bu təpə nöqtəsi birinci növ sərhəd nöqtəsi hesab olunur. Qonşu təpə nöqtələri G oblastında yerləşdikdə və ya birinci növ sərhəd nöqtəsi olduqda belə təpə nöqtəsi daxili nöqtə adlanır. Əks halda, şəbəkənin təpə nöqtəsi ikinci növ hesab olunur. Şəbəkənin daxili və birinci növ sərhəd nöqtələri hesab təpə nöqtələri adlanır. Şəkildə şəbəkənin daxili təpə nöqtələri kiçik dairələrlə, birinci növ sərhəd nöqtələri qara nöqtələrlə

göstərilmişdir. İkinci növ tərə nöqtələri isə xətlərlə ayrılmışdır. Şəbəkənin x_i, y_i tərə nöqtələrində funksiyanın qiymətlərini $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ işarə edək. Şəbəkənin daxili tərə nöqtələrində verilən diferensial tənliyi sonlu fərq tənlikləri ilə əvəz edək.

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1})$$

Burada $x_{i \neq 1}, y_{i \neq 1}$ tərə nöqtələri hesabət nöqtələrindədir. Birinci növ sərhəd nöqtələrində (B_h) axtarılan həllin qiyməti, şəbəkənin ona yaxın tərə nöqtəsindəki qiymətinə bərabər götürülür $u(B_h) = u(B) = \varphi(B)$. Dirixle məsələsi modelləşdirmə, Monte-Karlo üsulları ilə də həll etmək olar. Hər bir halda məsələnin həlli xətti tənliklər sisteminin həllinə gətirilir.

Mathcad sistemində Dirixle məsələsinin həlli

Əvvəlcə G oblastının düzbucaqlı olduğu hala baxaq. Tutaq ki ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

tənliyinin $G\{0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$ oblastında $0 \leq x \leq 4$ olduqda $u(x,0) = 0$ və $u(x,4) = x$, $0 \leq y \leq 4$ olduqda isə $u(0,y) = 0$ və $u(4,y) = y$ sərhəd şərtlərini ödəyən həllini tapmaq tələb olunur. $h=1$ addımı ilə ox üzrə $[0,4]$ və eləcə də oy oxu üzrə $[0,4]$ parçalarını bölərək, G oblastını kiçik kvadratlara ayıraq. Hər bir daxili nöqtə üçün sonlu fərq tənliklərini yazaq.

$$u_{1,1} = \frac{1}{4}(u_{0,1} + u_{1,0} + u_{1,2} + u_{2,1}), \quad u_{2,1} = \frac{1}{4}(u_{2,1} + u_{2,2} + u_{1,1} + u_{3,1}),$$

$$u_{3,1} = \frac{1}{4}(u_{3,0} + u_{2,1} + u_{3,2} + u_{4,1}),$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{4}(u_{1,1} + u_{1,3} + u_{0,2} + u_{2,2}), \quad u_{2,2} = \frac{1}{4}(u_{2,1} + u_{2,3} + u_{1,2} + u_{3,2}),$$

$$u_{3,2} = \frac{1}{4}(u_{3,1} + u_{3,3} + u_{2,2} + u_{4,2}),$$

$$u_{1,3} = \frac{1}{4}(u_{1,2} + u_{1,4} + u_{0,3} + u_{2,3}), \quad u_{2,3} = \frac{1}{4}(u_{2,2} + u_{2,4} + u_{1,3} + u_{3,3}),$$

$$u_{3,3} = \frac{1}{4}(u_{2,3} + u_{4,3} + u_{3,2} + u_{3,4}).$$

Bu tənliklərdə aşağıdakı sərhəd şərtlərini nəzərə alaq.

$$u_{0,0} = u_{0,1} = u_{0,2} = u_{0,3} = u_{0,4} = 0 \quad u_{0,0} = u_{1,0} = u_{2,0} = u_{3,0} = u_{4,0} = 0$$

$$u_{4,1} = 1, u_{4,2} = 2, u_{4,3} = 3, u_{4,4} = 4 \quad u_{0,4} = 0, u_{1,4} = 1, u_{2,4} = 2, u_{3,4} = 3$$

Sadələşdirmələr aparsaq aşağıdakı tənliklər sistemini alarıq.

$$\begin{aligned}
4u_{1,1} - u_{1,2} - u_{2,1} &= u_{0,1} + u_{1,0} = 0 \\
4u_{1,2} - u_{1,1} - u_{2,2} - u_{1,3} &= u_{0,2} = 0 \\
4u_{1,3} - u_{1,2} - u_{2,3} &= u_{0,3} + u_{1,4} = 1 \\
4u_{2,1} - u_{1,1} - u_{2,2} - u_{3,1} &= u_{2,0} = 0 \\
4u_{2,2} - u_{1,2} - u_{2,1} - u_{3,2} - u_{2,3} &= 0 \\
4u_{2,3} - u_{1,3} - u_{2,2} - u_{3,3} &= u_{2,4} = 2 \\
4u_{3,1} - u_{2,1} - u_{3,2} &= u_{3,0} + u_{4,0} = 1 \\
4u_{3,2} - u_{2,2} - u_{3,1} - u_{3,3} &= u_{4,2} = 1 \\
4u_{3,3} - u_{2,3} - u_{3,2} &= u_{4,3} + u_{3,4} = 4
\end{aligned}$$

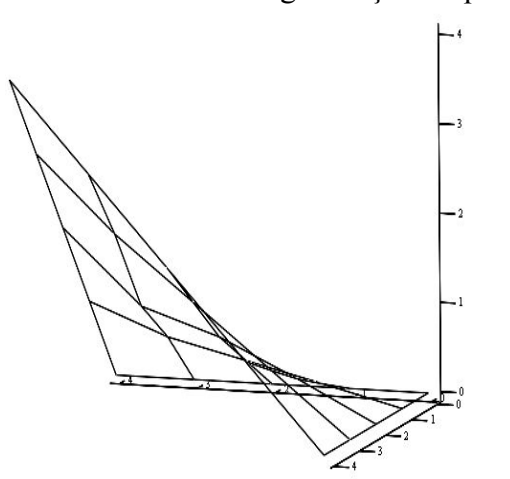
Tənliklər sistemini Mathcad sistemində həll etmək üçün sistemin əsas matrisini və sərbəst hədlər sütununu aşağıdakı fraqmentdə göstərilədiyi kimi daxil edib, tərs matris üsulu ilə həll edək.

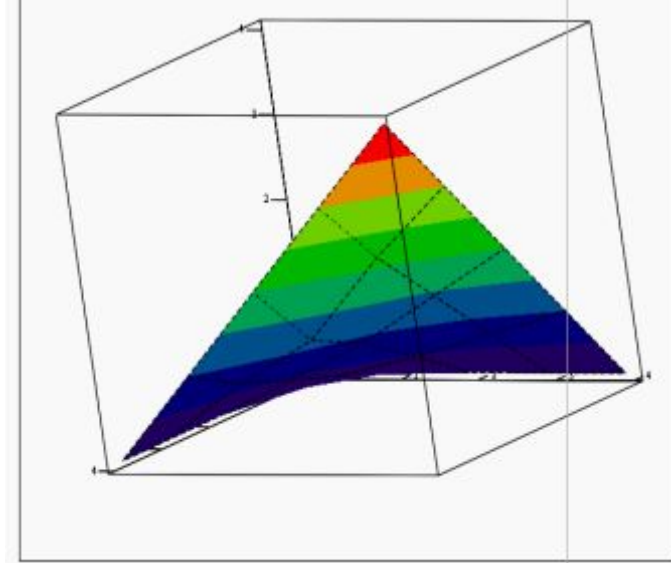
$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} := \mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.223 \\ 0.455 \\ 0.723 \\ 0.438 \\ 0.875 \\ 1.438 \\ 0.652 \\ 1.17 \\ 2.152 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.223 & 0.455 & 0.723 & 1 \\ 0 & 0.438 & 0.875 & 1.438 & 2 \\ 0 & 0.652 & 1.17 & 2.152 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Alınmış həllin Mathcad sistemində iki müxtəlif görünüşünün qrafiki verilmişdir.



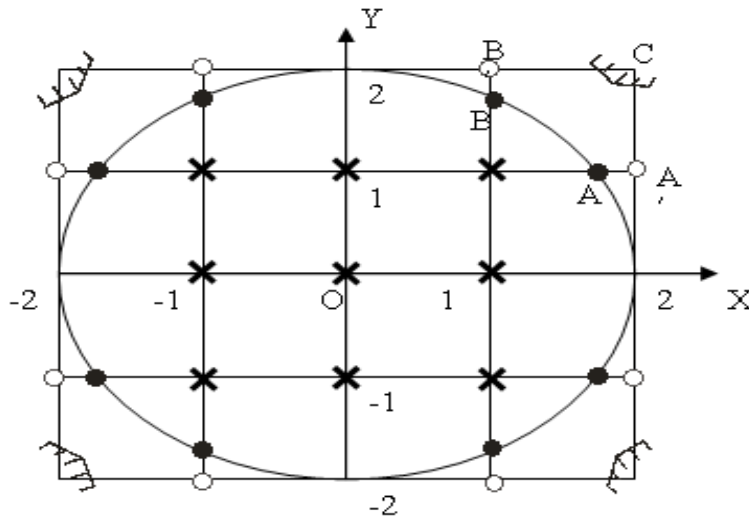


Qrafiklərdən görünür ki, alınmış həll qoyulmuş sərhəd şərtlərini ödəyir.

G oblastının düzbucaqlı olmadığı hala baxaq. Tutaq ki,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

tənliyinin $x^2 + y^2 < 16$ oblastında $x^2 + y^2 = 16$ (Γ) çevrəsi boyunca $u|_{\Gamma} = x^2 y^2$ sərhəd şərtini ödəyən həlli axtarılır. $-2 \leq x \leq 2$ və $-2 \leq y \leq 2$ parçalarının hər birini $h=1$ addımı ilə kvadratlara bölək (şəkil 8.6).



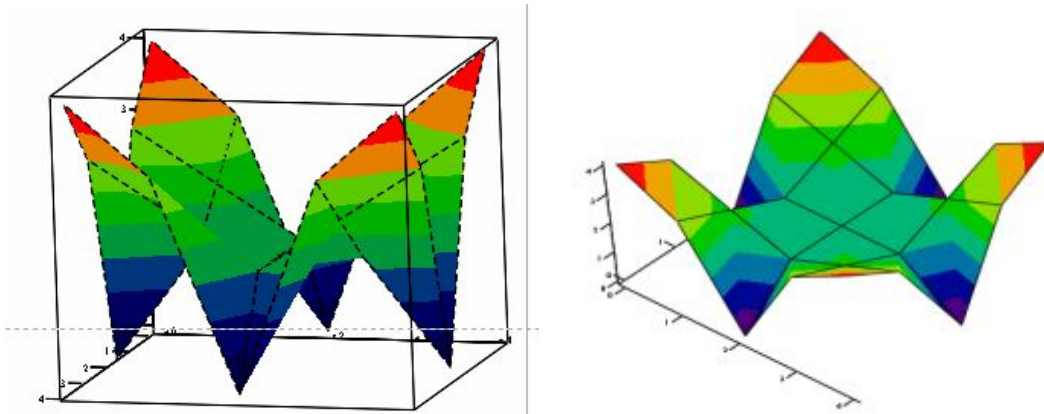
Şəkil 8.6.

Şəkilə oblastın sərhəd nöqtələri qara dairələrlə, sərhəd nöqtələri içərisi boş dairələrlə (birinci növ sərhəd nöqtələri), daxili nöqtələr isə vurma işarələri ilə işarələnmişdir. Hesabat nöqtələrinin sayı əvvəlki məsələ ilə eyni olduğundan tənliklər sisteminin yalnız sərbəst hədlərinin qiymətləri dəyişəcəkdir. Mathcad sistemində tərtib olunmuş hesabat blokundan istifadə edərək sərhəd şərtlərinin qiymətini dəyişək və xətti tənliklər sistemini həll edək.

$$b^T = (6 \ 0 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 6 \ 0 \ 6)$$

$$x^T = (2.25 \ 1.5 \ 2.25 \ 1.5 \ 1.5 \ 1.5 \ 2.25 \ 1.5 \ 2.25)$$

$$u := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 2.25 & 1.5 & 2.25 & 3 \\ 0 & 1.5 & 1.5 & 1.5 & 0 \\ 3 & 2.25 & 1.5 & 2.25 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



Axtarılan həllin üç ölçülü fəzada iki müxtəlif görünüşü verilmişdir. Bu qrafiklərdən görünür ki, həll sərhəd şərtlərini ödəyir. Başqa alqoritmik dillərdə xüsusi törəməli diferensial tənliyi həll etmək olar. Ancaq bu alqoritmik dillərdə həllin tapılması və həlli xarakterizə edən səthin qurulması üçün Mathcad mühitində olan imkanlar yoxdur.

Hiperbolik tip tənlik üçün başlanğıc və sərhəd şərtləri

Praktik məsələlərdə aşağıdakı şəkildə hiperbolik tip tənlik üçün başlanğıc və sərhəd məsələlərinin həllinə baxılır.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (7)$$

Burada a - sabit ədəddir. Bu tənlik uzunluğu l olan bircins tirin sərbəst rəqslərini xarakterizə edir. (7)-də $\xi = x - at$ $\zeta = x + at$ əvəzləməsi aparıb tənliyi çevirək.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \zeta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \zeta} = \Phi_1'(\zeta)$$

Buradan axtarılan U funksiyasını tapa bilərik $U = \Phi_1(\zeta) + \Phi_2(\xi)$. Burada $\Phi_1(\zeta)$ və $\Phi_2(\xi)$ ixtiyari funksiyalardır. x və t dəyişənlərinə qayıtsaq həlli aşağıdakı kimi yazsaq bilərik.

$$U = \Phi_1(x + at) + \Phi_2(x - at)$$

Bu üçül D'alamber üsulu adlanır.

1. **Koşu məsələsi.** (7) tənliyinin

$$U|_{t=0} = \varphi_0(x) \quad \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x)$$

Başlanğıc şərtlərini ödəyən həlli axtarılır. Burada $\varphi_0(x)$ və $\varphi_1(x)$ funksiyaları $(0, l)$ parçasında kəsilməz funksiyalardır.

2. Ola bilər ki, tirin hər iki ucu bağlı olsun. Bu halda $U(0, t) = 0$ $U(l, t) = 0$ şərtləri qoyulur.

3. Sərhəd şərtləri daha ümumi şəkildə qoyula bilər.

$$x = 0 \text{ olduqda} \quad \alpha U(0, t) + \beta \frac{\partial U(0, t)}{\partial x} = f_1(t),$$

$$x = l \text{ olduqda} \quad \gamma U(l, t) + \delta \frac{\partial U(l, t)}{\partial x} = f_2(t),$$

$$t = 0 \text{ olduqda} \quad U(x, 0) = f_3(x) \quad \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = f_4(x).$$

Bu halda həll $t > 0$ olmaqla $x \in [0, l]$ parçasında axtarılır.

Məsələ daha ümumi şəkildə qoyula bilər.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial U}{\partial y} + c(x, y) U = F(x, y)$$

Bu tənlik üçün yuxarıda qoyulmuş başlanğıc və sərhəd şərtləri daxilində həll axtarıla bilər. Qoyulan məsələnin analitik həllini tapmaq həmişə mümkün olmur. Bu halda təqribi üsullardan istifadə olunur. Əksər hallarda fərq tənlikləri tərtib etməklə hiperbolik tip tənliyin həllinin cədvəli tapılır.

Hiperbolik tip tənliyin həlli üçün fərq tənliklərinin tərtib olunması

Mathcad sitemində hiperbolik tənliyi həll etmək üçün əvvəlcə sadə tirin rəqs tənliyi üçün sonlu fərq tənliklərini tərtib edək. Tutaq ki,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

tənliyinin

$$u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad \text{və} \quad u(0, t) = \varphi(t) \quad u(l, t) = \psi(t) \quad t \geq 0$$

şərtləri daxilində həlli axtarılır. Şəbəkə üsulu ilə məsələni həll edək. $[0, l]$ parçasını n bəra-

bər hissəyə bölək. Eyni qayda ilə t dəyişənini 0-dan başlayaraq k addımı ilə dəyişək.

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \frac{l}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\Delta t_j = t_{j+1} - t_j = k \quad (j = 1, 2, \dots)$$

(x_i, t_j) , $(i = 1, 2, \dots, n)$, $(j = 1, 2, \dots)$ nöqtələrində axtarılan funksiyanın qiymətini $u_{i,j}$ ilə işarə edib, ikinci tərtib xüsusi törəmələrin təqribi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)}{k^2}$$

ifadələrini nəzərə alsaq, verilən hiperbolik tənliyə uyğun sonlu fərq tənlikləri aşağıdakı kimi yazılar.

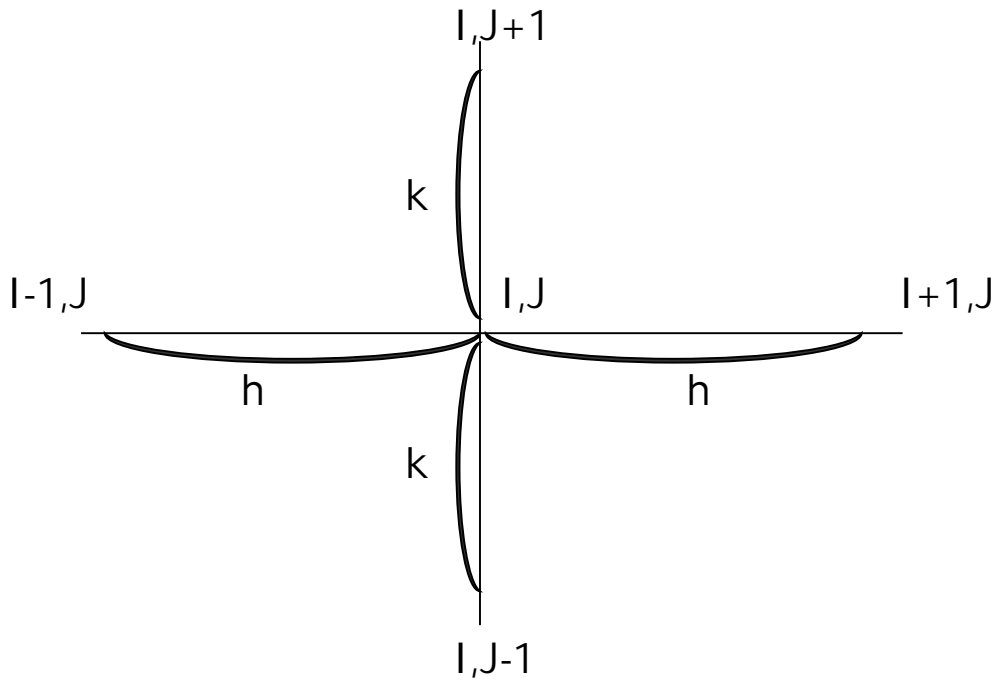
$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$h^2(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) = (ka)^2(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

alınmış tənlikdə $M = \frac{(ka)^2}{h^2}$ işarələməsi aparıb, $u_{i,j+1}$ -i tapaq:

$$u_{i,j+1} = M(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + 2(1-M)u_{i,j} - u_{i,j-1}$$

Deməli bu hesabat düsturundan istifadə edərək ixtiyari $(i,j+1)$ nöqtəsində funksiyanın qiymətini hesablamaq üçün $(i+1,j)$, (i,j) , $(i-1,j)$ və $(i,j-1)$ nöqtələrində funksiyanın qiymətləri məlum olmalıdır (şəkil 8.7).



Şəkil 8.7.

$t=0$ anı, j indeksinin 0 qiymətinə uyğun gəldiyini nəzərə alsaq, tənlik aşağıdakı kimi yazılır:

$$u_{i,1} = M(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) + 2(1-M)u_{i,0} - u_{i,-1} \quad (8)$$

$u_{i+1,0}, u_{i-1,0}, u_{i,0}, u_{i,-1}$ qiymətləri başlanğıc və sərhəd şərtlərindən müəyyən olunmalıdır. $u_{i,0}$ qiyməti $u_{i,0} = f(ih), (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ düsturu ilə hesablanır. $u_{i,-1}$ qiyməti $u_i(in, 0) = F(in)$ başlanğıc şərtindən tapılır. Birinci tərtib törəmə üçün sonlu fərqin ifadəsindən istifadə edək.

$$\frac{u_{i,-1} - u_{i,0}}{-h} = F_i = F(x_i) \Rightarrow u_{i,-1} = u_{i,0} - hF_i$$

qiymətini nəzərə alsaq, $j=1$ anı üçün funksiyanın qiymətini hesablaya bilərik. $j=0$ və $j=1$ anlarında axtarılan funksiyanın qiymətləri məlum olduğdan sonra ardıcıl olaraq (8) hesabat düsturundan istifadə edərək, verilən başlanğıc və sərhəd şərtlərini ödəyən həllin cədvəlini alarıq. Əksər hallarda $u_{i,1}$ qiymətini daha dəqiq hesablamaq üçün Teylor sırasına ayrılışdan istifadə edirlər.

$$u_{i,1} \approx u_{i,0} + k \frac{\partial u_{i,0}}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,0}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 u_{i,0}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_{i,0}}{\partial x^2} = a^2 f''(x_i),$$

$$\frac{\partial u_{i,0}}{\partial t} = F_i, \quad u_{i,0} = f_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

olduğunu nəzərə alsaq $j=1$ üçün

$$u_{i,1} = f_i + kF_i + \frac{k^2 a^2}{2} f_i'' \quad (9)$$

$j=0$ üçün isə $u_{i,0} = f_i$ münasibətlərini alarıq.

Mathcad sistemində hiperbolik tip tənliyin həlli

Tirin sərbəst rəqslərinin u matrisində əks olunması üçün bu matrisin 0-cı sütununa $t=0$ anında tirin vəziyyətini xarakterizə edən funksiyanın qiymətləri, birinci və axırınıcı sətirlərində isə tirin $x=0$ və $x=1$ uc nöqtələrinin verilən sərhəd şərtləri ilə müəyyən olunan funksiyaların qiymətləri, 1-ci sütunda isə (9) düsturu ilə hesabatın nəticələri yazılmalıdır. u matrisinin yerdə qalan elementləri (8) hesabat düsturları ilə tapılmalıdır. Aşağıda verilən

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

tənliyinin $U(x, 0) = x(3.14 - x)$ $U_x(x, 0) = 0$ $0 \leq x \leq 3.14$ başlanğıc və $U(0, t) = 0$ $U(1, t) = 0$ $0 \leq t$ sərhəd şərtlərini ödəyən həllinin Mathcad sistemində hesabat blokları verilmişdir.

```

f(x) := 3.14x - x2    fl(x) := 0    fl(t) := 0    fl1(t) := 0

a := 1                h := 3.14/18    k := h

i := 0..18
  xi := h · i
  ui,0 := f(xi)

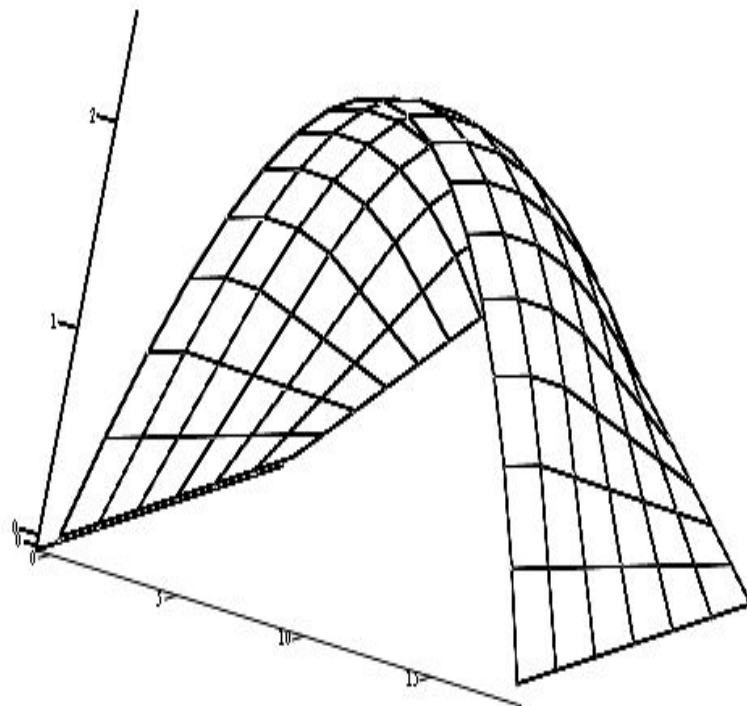
  j := 0..6
  u0,j := fl(xj)
  u18,j := fl1(xj)

  +
  i := 1..17
  fl(x) := d2/dx2f(x)

  ui,1 := f(xi) + k · fl(xi) + 0.5 · a2 · k2 · fl(xi)

```

Höllin cədvəli və həlli xarakterizə edən səthin qurulmuş qrafikində başlanğıc və sərhad şərtlərinin ödəndiyini görürük.



$$r := 2 \cdot \left[1 - \frac{(k^2 \cdot a^2)}{h^2} \right] \quad 1 := \frac{(k^2 \cdot a^2)}{h^2}$$

$$j := 2 \quad i := 1..17$$

$$u_{i,j} := r \cdot u_{i,j-1} - u_{i,j-2} + 1 \cdot (u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1})$$

$$j := 3 \quad i := 1..17$$

$$u_{i,j} := r \cdot u_{i,j-1} - u_{i,j-2} + 1 \cdot (u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1})$$

$$j := 4 \quad i := 1..17$$

$$u_{i,j} := r \cdot u_{i,j-1} - u_{i,j-2} + 1 \cdot (u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1})$$

$$j := 5 \quad i := 1..17$$

$$u_{i,j} := r \cdot u_{i,j-1} - u_{i,j-2} + 1 \cdot (u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1})$$

$$j := 6 \quad i := 1..17$$

$$u_{i,j} := r \cdot u_{i,j-1} - u_{i,j-2} + 1 \cdot (u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1})$$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.517	0.456	0.396	0.335	0.274	0.213	0.152
2	0.974	0.913	0.791	0.669	0.548	0.426	0.304
3	1.369	1.309	1.187	1.004	0.822	0.639	0.456
4	1.704	1.643	1.522	1.339	1.096	0.852	0.609
5	1.978	1.917	1.795	1.613	1.369	1.065	0.761
6	2.191	2.13	2.008	1.826	1.582	1.278	0.913
7	2.343	2.282	2.161	1.978	1.735	1.43	1.065
8	2.434	2.374	2.252	2.069	1.826	1.522	1.156
9	2.465	2.404	2.282	2.1	1.856	1.552	1.187
10	2.434	2.374	2.252	2.069	1.826	1.522	1.156
11	2.343	2.282	2.161	1.978	1.735	1.43	1.065
12	2.191	2.13	2.008	1.826	1.582	1.278	0.913
13	1.978	1.917	1.795	1.613	1.369	1.065	0.761
14	1.704	1.643	1.522	1.339	1.096	0.852	0.609
15	1.369	1.309	1.187	1.004	0.822	0.639	0.456

+

Tartib olunmuş hesabat blokunda yalnız başlanğıc şərtləri dəyişməklə müxtəlif məsələlərin həllərini tədqiq etmək olar. Müxtəlif ədəbiyyatlarda həll olunmuş məsələlər tartib olunmuş hesabat blokunun köməyi ilə həll edilmiş və nəticələr tutuşdurulmuşdur.

Ümumi şəkildə hiperbolik tənliyin həllinə baxaq:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial t} + pG(x,t)$$

Hiperbolik tip tənliyə üçün sonlu fərq tənliklərini tartib edək. Birinci tartib törəmələr üçün sonlu fərq ifadələrini yazaq:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k}$$

Bu ifadələri nəzərə alsaq fərq tənliyi aşağıdakı kimi yazılar:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + b \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + c \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + pG_{i,j}$$

Çevirmələr aparıb

$$a_1 = \frac{(ak)^2 + bk^2}{h^2(1-ck)} \quad a_2 = \frac{2h^2 - ckh^2 - 2(ak)^2 - hbk^2}{h^2(1-ck)} \quad a_3 = \frac{(ak)^2}{h^2(1-ck)}$$

$$a_4 = \frac{1}{(1-ck)} \quad a_5 = \frac{pk^2}{(1-ck)}$$

işarələmələrini nəzərə alsaq, nəticədə aşağıdakı hesabat düsturunu alarıq:

$$u_{i,j+1} = a_1 u_{i+1,j} + a_2 u_{i,j} + a_3 u_{i-1,j} - a_4 u_{i,j-1} + a_5 G_{i,j}$$

Bu fərq tənliyi b, c və p əmsallarının müxtəlif qiymətlərində müxtəlif hiperbolik tip tənliyə uyğundur. Ümumi hal üçün Mathcad sistemində hesabat bloku tərtib edək.

verilenler

$$f(x) := 3.14x - x^2 \quad fl(x) := 0 \quad fl(t) := 0 \quad fl1(t) := 0 \quad g(x,t) := 0$$

$$a := 1 \quad h := \frac{3.14}{18} \quad k := h$$

$$i := 0..18 \quad b := 0.1 \quad c := 0 \quad p := 0$$

$$x_i := h \cdot i$$

$$u_{i,0} := f(x_i)$$

$$j := 0..6 \quad t_j := k \cdot j$$

$$u_{0,j} := fl(t_j)$$

$$u_{18,j} := fl1(t_j)$$

$$i := 1..17$$

$$ff(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

$$u_{i,1} := f(x_i) + k \cdot fl(x_i) + 0.5 \cdot a^2 \cdot k^2 \cdot ff(x_i)$$

$$j := 0..6$$

$$i := 0..18$$

$$gl_{i,j} := g(x_i, t_j)$$

$$a1 := 1 - c \cdot k$$

$$a2 := a1 \cdot h^2$$

$$a3 := (a \cdot k)^2$$

$$am1 := \frac{(a3 + b \cdot k^2)}{a2}$$

$$am2 := \frac{(2 \cdot h^2 - c \cdot k \cdot h^2 - 2 \cdot a3 - b \cdot h \cdot k^2)}{a2}$$

$$am3 := \frac{a3}{a2}$$

$$am4 := \frac{1}{a1}$$

$$am5 := p \cdot \frac{k^2}{a1}$$

İlkin verilənlərdə c və p parametrlərinin qiyməti sıfıra bərabərdir. Deməli tənlikdə t -yə görə birinci tərtib törəmə və sərbəst hədd iştirak etməyəcək. $b=0.1$ olduğundan x dəyişəninə görə birinci tərtib törəmə tənlikdə iştirak edəcək və tənliyin tipi yenə də hiperbolikdir. Hesabat düsturlarını ardıcıl yazsaq, qoyulan başlangıç və sərhəd şərtlərini ödəyən həllin cədvəlini və uyğun səthin qrafikini alarıq.

$$j:=2 \quad i:=1..17$$

$$u_{i,j} := am1 \cdot u_{i+1,j-1} + am2 \cdot u_{i,j-1} + am3 \cdot u_{i-1,j-1} - am4 \cdot u_{i,j-2} + am5 \cdot g_{i,j}$$

$$j:=3 \quad i:=1..17$$

$$u_{i,j} := am1 \cdot u_{i+1,j-1} + am2 \cdot u_{i,j-1} + am3 \cdot u_{i-1,j-1} - am4 \cdot u_{i,j-2} + am5 \cdot g_{i,j}$$

$$i:=4 \quad i:=1..17$$

$$u_{i,j} := am1 \cdot u_{i+1,j-1} + am2 \cdot u_{i,j-1} + am3 \cdot u_{i-1,j-1} - am4 \cdot u_{i,j-2} + am5 \cdot g_{i,j}$$

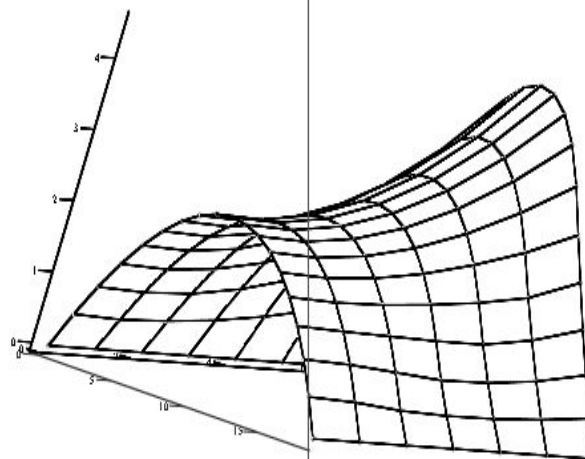
$$j:=5 \quad i:=1..17$$

$$u_{i,j} := am1 \cdot u_{i+1,j-1} + am2 \cdot u_{i,j-1} + am3 \cdot u_{i-1,j-1} - am4 \cdot u_{i,j-2} + am5 \cdot g_{i,j}$$

$$j:=6 \quad i:=1..17$$

$$u_{i,j} := am1 \cdot u_{i+1,j-1} + am2 \cdot u_{i,j-1} + am3 \cdot u_{i-1,j-1} - am4 \cdot u_{i,j-2} + am5 \cdot g_{i,j}$$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.517	0.487	0.512	0.571	0.669	0.808	1
2	0.974	0.943	0.97	1.082	1.264	1.53	1.886
3	1.369	1.339	1.392	1.529	1.787	2.153	2.657
4	1.704	1.674	1.748	1.93	2.227	2.683	3.295
5	1.978	1.948	2.038	2.254	2.604	3.105	3.808
6	2.191	2.161	2.263	2.502	2.888	3.439	4.178
u = 7	2.343	2.313	2.422	2.674	3.08	3.656	4.428
8	2.434	2.404	2.514	2.769	3.178	3.756	4.525
9	2.465	2.434	2.541	2.788	3.182	3.738	4.471
10	2.434	2.404	2.502	2.73	3.094	3.602	4.265
11	2.343	2.313	2.397	2.597	2.913	3.349	3.907
12	2.191	2.161	2.226	2.386	2.638	2.978	3.398
13	1.978	1.948	1.99	2.1	2.271	2.49	2.786
14	1.704	1.674	1.687	1.737	1.81	1.929	2.187
15	1.369	1.339	1.319	1.298	1.297	1.401	1.595



Başlanğıc və sərhəd şərtlərində dəyişiklik yoxdur. Yalnız tənlikdə yeni hədd, birinci tərtib törəmənin iştirak etdiyi hədd əlavə olunduğundan həllin cədvəli və uyğun səth dəyişmişdir.

Fərqi qrafikləri müqayisə etməklə görmək olar. Bu qayda ilə tərtib olunmuş hesabat blokundan istifadə etməklə müxtəlif hiperbolik tənlikləri həll etmək olar.

Parabolik tip tənlik üçün fərq tənliklərinin tərtibi

Parabolik tip tənliklər fiziki proseslərin tədqiqində geniş istifadə olunur. Bircins çubuqda istiliyin zamandan asılı dəyişməsi aşağıdakı parabolik tip tənliklə xarakterizə olunur:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t)$$

Burada a -sabitdir və çubuğun fiziki xassələrini xarakterizə edir. $F(x, t)$ çubuğun uzunluğu boyunca zaman keçdikcə verilən istilik mənbəyinin intensivliyini göstərir. Əgər istilik mənbəyi yoxdursa, yəni $F(x, t) = 0$ olarsa, istiliyin zaman keçdikcə çubuqda dəyişməsi aşağıdakı tənliklə xarakterizə olunur:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{və ya} \quad \frac{\partial u}{a^2 \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$a^2 t = \eta$ əvəzləməsi aparsaq, tənlik aşağıdakı şəkildə yazılır.

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Deməli $F(x, t) = 0$ olduqda verilən tənliyi əvəzləmə aparılaraq həmişə

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

şəklinə gətirmək olar. Bilirik ki, həllin birqiymətli olması üçün başlanğıc və sərhəd şərtləri verilməlidir. Başlanğıc şərt, $t = 0$ olduqda $u(x, 0) = f(x)$, yəni başlanğıc anda çubuğun (ℓ) uzunluğu boyunca $x \in (0, \ell)$ temperaturun paylanması verilməlidir. Əgər zaman keçdikcə çubuğun uclarında temperaturun dəyişmə qanunu məlumdursa sərhəd şərtləri aşağıdakı kimi yazıla bilər.

$$u(0, t) = \varphi(t) \quad u(\ell, t) = \psi(t)$$

Tələb olunur ki, çubuğun uzunluğu boyunca zaman keçdikcə sərhəd şərtləri ödənilməklə temperaturun dəyişməsi müəyyən olunsun. Bunun üçün (x, t) müstəvisində $t \geq 0, 0 \leq x \leq \ell$ oblatında şəbəkə tərtib edək. Burada h ox oxu boyunca yönəlmiş çubuğun hesabat aparılacaq nöqtələri arasında addımdır ($h = \ell/n$). Zaman oxu boyunca $(0, t)$ hesabat addım isə $k = \sigma h^2$ düsturu ilə müəyyən olunur. Burada σ -nın seçilməsi üzərində ayrıca

dayanacağıq. Şəbəkənin düyün nöqtələrində axtarılan funksiyanı $u_{ij} = u(x_i, t_j)$ kimi işarə edək. Verilən parabolik tip tənliyi sonlu fərqlərlə aproksimasiya etmək üçün birinci və ikinci tərtib törəmələrin aşağıdakı ifadələrindən istifadə edək.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\sigma h^2}$$

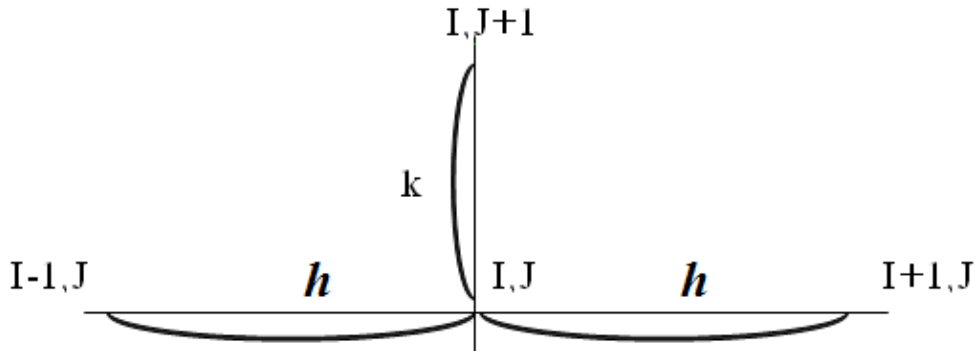
Bu ifadələri nəzərə alsaq, həlli axtarılan parabolik tip tənlik üçün fərq tənlikləri aşağıdakı kimi yazılar:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\sigma h^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

Sadələşdirmələr aparsaq

$$u_{i,j+1} = \sigma u_{i-1,j} + (1 - 2\sigma)u_{i,j} + \sigma u_{i+1,j}$$

sonlu fərq tənliyinin daha sadə formasını alarıq. Bu münasibətdən görünür ki, j indeksinin müəyyən qiymətində yəni $t_j = jk$ anında çubuğun $x_i \in (0, \ell)$ nöqtələrində $u_{ij} = u(x_i, t_j)$ qiymətlərini bilməklə indeksin $j+1$ qiymətinə uyğun $t_{j+1} = k(j+1)$ anında çubuğun uzunluğu boyunca temperaturu hesablamaq olar. Hesabatda iştirak edən nöqtələrin sxemi aşağıda verilmişdir (Şəkil 8.8).



Şəkil 8.8.

$J=0$, yəni $t=0$ olduqda fərq tənliyi aşağıdakı kimi yazılar.

$$u_{i,1} = \sigma u_{i-1,0} + (1 - 2\sigma)u_{i,0} + \sigma u_{i+1,0}$$

$u_{i-1,0}, u_{i,0}, u_{i+1,0}$ qiymətləri $u_{i0} = u(x_i, 0) = f(x_i), (i = 1, 2, \dots, n-1)$ başlanğıc şərtlərdən, $u_{0,0}, u_{n,0}$ qiymətləri isə verilən sərhəd şərtlərindən müəyyən olunur.

$$u(0,0) = u_{0,0} = \varphi(0) \quad u(\ell,0) = u_{n,0} = \psi(0).$$

Bu qayda ilə $j=1$ yəni $t_1 = k$ anı üçün çubuqda istiliyin yayılmasını müəyyən edən $u_{i1} = u(x_i, t_1)$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$) qiymətlərini tapa bilərik. $j=2$ qiymətində, yəni $t=2k$ anında fərq tənliyi aşağıdakı kimi olar:

$$u_{i,2} = \sigma u_{i-1,1} + (1 - 2\sigma)u_{i,1} + \sigma u_{i+1,1}$$

$t_1 = k$ anında hesabat qiymətlərindən və sərhəd şərtindən istifadə edərək $t=2k$ anı üçün hesabat qiymətlərini tapa bilərik. Bu qayda ilə ardıcıl olaraq, müəyyən zaman anında çubuqda istiliyin yayılmasını xarakterizə edən funksiyanın qiymətlər cədvəlini tapa bilərik. Alınmış hesabat qiymətlərindəki xəta, eləcə də parabolik tip tənliyin sonlu fərq tənlikləri ilə aproksimasiyasında xəta σ parametrinin seçilməsindən asılıdır. σ parametrinin seçilməsi üçün aşağıdakı işarələmələri aparaq:

$$L[U] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$L_h[U] = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\sigma}$$

$L_h[U]$ operatoru $L[U]$ diferensial operatoruna uyğun sonlu fərq operatorudur. $R_h[U] = L_h[U] - L[U]$ fərqi aproksimasiyanın xətası adlanır. Şəbəkəninin (x_i, t_j) ($i = 1, 2, \dots, n$), ($j = 1, 2, \dots$) düyün nöqtələrində xətanı qiymətləndirək. $u(x, t)$ funksiyası parabolik tənliyin həlli olduğundan düyün nöqtələrində $L[U] = 0$ və $R_h[U] = L_h[U]$ şərti ödənər.

$$u_{i+1,j} = u(x_i + h, t_j) \quad u_{i-1,j} = u(x_i - h, t_j) \quad u_{i,j+1} = u(x_i, t_j + \sigma h^2)$$

işarələmələrini nəzərə alıb, $L_h[U]$ sonlu fərq operatorunu (x_i, t_j) düyün nöqtəsinin yaxın ətrafında Teylor sırasına ayıraq və h^6 tərtib həddinə qədər hədlərlə kifayətlənək.

$$L_h[U] = \frac{1}{h^2} \left\{ \left(u_{i,j} + h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} + \frac{h^5}{5!} \frac{\partial^5 u_{i,j}}{\partial x^5} + \frac{h^6}{6!} \frac{\partial^6 u_{i,j}}{\partial x^6} - u_{i,j} - \right. \right. \\ \left. \left. - h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} - \frac{h^5}{5!} \frac{\partial^5 u_{i,j}}{\partial x^5} + \frac{h^6}{6!} \frac{\partial^6 u_{i,j}}{\partial x^6} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sigma} \left[u_{i,j} + \sigma h^2 \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{(\sigma h^2)^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + \frac{(\sigma h^2)^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial t^3} - u_{i,j} \right] \right\} + o(h^6)$$

$$L_h[U] = \left(\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} \right) + h^2 \left(\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} \right) + h^4 \left(\frac{1}{360} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} - \frac{\sigma^2}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial t^3} \right) + o(h^6)$$

$u(x, t)$ funksiyası parabolik tənliyin həlli olduğundan

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t}, \quad \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^6 u_{i,j}}{\partial x^6} = \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial t^3}$$

münasibətlərini nəzərə alsaq $L_h[U]$ sonlu fərq operatoru üçün daha sadə ifadə alarıq:

$$L_h[U] = h^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{\sigma}{2} \right) \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} + h^4 \left(\frac{1}{360} - \frac{\sigma^2}{6} \right) \frac{\partial^6 u_{i,j}}{\partial x^6} + o(h^6).$$

Əgər $\sigma = 1/6$ götürsək, $\frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4}$ həddinin əmsalı sıfıra çevrilər və $L_h[U]$ sonlu fərq operatorunun ifadəsi aşağıdakı kimi olar.

$$R_h[U] = L_h[U] = -\frac{h^4}{540} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} + o(h^6)$$

Deməli $\sigma = 1/6$ götürdükdə xəta ən az olar və hesabat düsturu aşağıdakı kimi yazılar.

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6} (u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

Daha ümumi şəkildə parabolik tip tənlik üçün fərq tənliklərini tərtib edək.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu + F(x, t)$$

Bu tənlikdə birinci və ikinci tərtib törəmələrin məlum sonlu fərq

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\sigma h^2} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$

ifadələrini nəzərə alaraq.

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\sigma h^2} - a \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - b \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} - cu_{i,j} - mF_{i,j} = 0$$

Sadələşdirmələr aparsaq, sonlu fərq tənliklərini aşağıdakı şəkildə yazıb bilirik:

$$u_{i,j+1} + (2a\sigma - 1 - c\sigma h^2)u_{i,j} - \frac{\sigma}{2}(2a - bh)u_{i+1,j} + \frac{\sigma}{2}(bh - 2a)u_{i-1,j} - \sigma h^2 m f_{i,j} = 0$$

$$u_{i,j+1} = -(2a\sigma - 1 - c\sigma h^2)u_{i,j} + \frac{\sigma}{2}(2a - bh)u_{i+1,j} - \frac{\sigma}{2}(bh - 2a)u_{i-1,j} + \sigma h^2 m f_{i,j}$$

$\sigma = 1/6$ olduğunu nəzərə alsaq

$$u_{i,j+1} = -\left(\frac{a}{3} - 1 - \frac{1}{6}ch^2\right)u_{i,j} + \frac{1}{12}(2a - bh)u_{i+1,j} - \frac{1}{12}(bh - 2a)u_{i-1,j} + \frac{1}{6}h^2 m f_{i,j}$$

Əgər alınmış ifadədə $a=1$, $b=0$, $c=0$ və $m=0$ götürsək

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6} (u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

münasibətini alırıq.

Mathcad sistemində parabolik tip tənlik üçün sərhəd məsələsinin həlli

Paraqraf 8.9-da parabolik tip tənliyin şəbəkə üsulu ilə həlli üçün fərq tənlikləri çıxarılmış və nəticədə aşağıdakı hesabat düsturu əsaslandırılmışdır.

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j}) \quad (10)$$

Tutaq ki,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

parabolik tip tənliyin $t = 0$ olduqda $u(x,0) = 4x(1-x)$ başlanğıc və $u(0,t) = 0$ $u(1,t) = 0$, $0 \leq t < \infty$ sərhəd şərtlərini ödəyən həllini tapmaq tələb olunur. Yəni başlanğıc anda çubuğun uzunluğu boyunca $x \in (0,1)$ temperaturun paylanması və zaman keçdikcə çubuğun uclarında temperaturun dəyişmədiyi məlumdur.

Mathcad sistemində sərhəd məsələsinin həlli üçün çubuğun uzunluğunu, yəni $(0,1)$ parçasını $h=0.1$ addımı ilə, zaman intervalını isə $1/600$ addımı ilə bölüb şəbəkə tərtib edək.

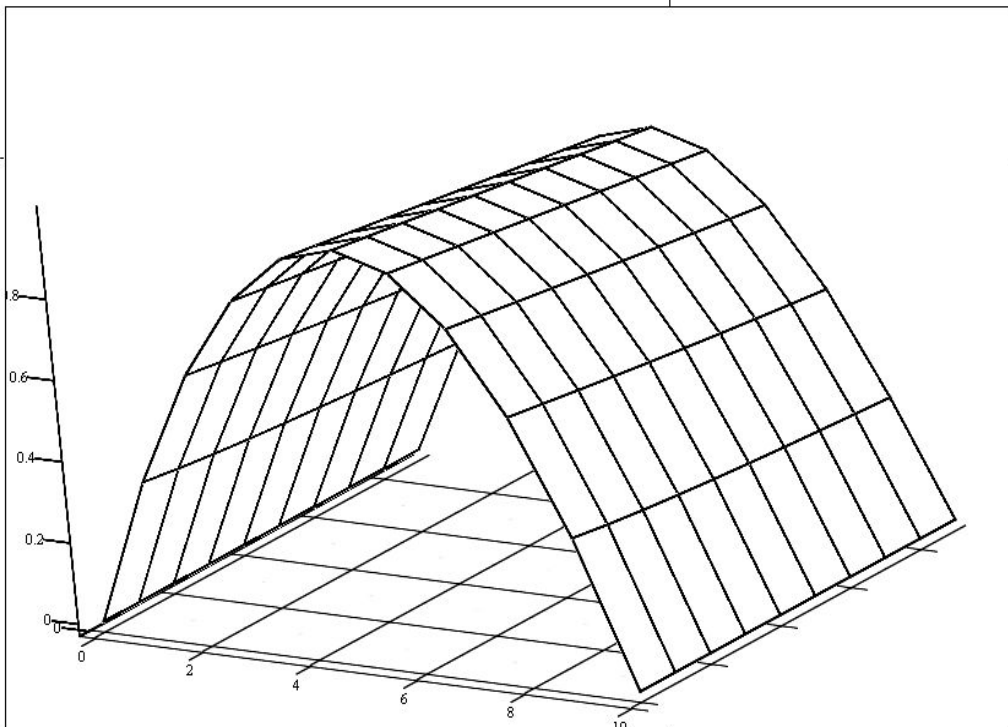
$$t_j = \frac{j}{600} \quad x_i = 0.1 * i, \quad u(x_i, 0) = 4x_i(1 - x_i) = 0,4i(1 - 0.1i). \quad (i = 0,1,2,3,\dots,10.)$$

Mathcad sistemində hesabatı təşkil etmək üçün u_{ij} matrisinin sıfırıncı sətirinə $0,4i(1-0.1i)$. ($i = 0,1,2,3,\dots,10.$) qiymətlərini, sıfırıncı və 10-cu sütunlarına isə sərhəd şərtlərində verildiyi kimi sıfır mənimsədilməlidir. Başlanğıc və sərhəd şərtlərinə uyğun qiymətlərin u_{ij} matrisinə mənimsədilməsi və hesabat düsturları aşağıdakı fragmentdə verilmişdir.

(10) düsturları ilə aparılmış hesabatların nəticələri yəni həllin cədvəli aşağıdakı fraqmentdə verilmişdir.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.36	0.347	0.336	0.326	0.317	0.31	0.302	0.296	0.289	0.283
2	0.64	0.627	0.613	0.6	0.588	0.576	0.564	0.553	0.543	0.533
3	0.84	0.827	0.813	0.8	0.787	0.774	0.761	0.748	0.735	0.723
4	0.96	0.947	0.933	0.92	0.907	0.893	0.88	0.867	0.854	0.841
5	1	0.987	0.973	0.96	0.947	0.933	0.92	0.907	0.893	0.88
6	0.96	0.947	0.933	0.92	0.907	0.893	0.88	0.867	0.854	0.841
7	0.84	0.827	0.813	0.8	0.787	0.774	0.761	0.748	0.735	0.723
8	0.64	0.627	0.613	0.6	0.588	0.576	0.564	0.553	0.543	0.533
9	0.36	0.347	0.336	0.326	0.317	0.31	0.302	0.296	0.289	0.283
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Alınmış həllin başlanğıc və sərhəd şərtlərini ödəməsi həllin cədvəlindən görünür. Deyilənlər həllin qurulmuş integral səthində daha aydın görünür.



Sərhəd şərtlərini dəyişmək üçün hesabat blokunda dəyişiklik etmək lazımdır. Çubuğun son ucunda zaman keçdikcə temperaturun $0.24 \sin(t/3)$ qanunu dəyişdiyini nəzərə alsaq, hesabat blokunda dəyişiklik aşağıdakı kimi verilməlidir.

Mathcad Профессиональная версия - [iman]

Файл Правка Просмотр Вставка Форматирование Математика Символика Окно Помощь

Normal Arial 10 B I U

verilerler

$$f(x) := 4 \cdot x \cdot (1 - x)$$

$$ff(t) := 0 \quad h := 0.1 \quad k := \frac{1}{3}$$

$$i := 0..10 \quad fl(t) := 0.25 \sin(k \cdot t)$$

$$x_i := h \cdot i$$

$$u_{i,0} := f(x_i)$$

$$j := 0..9$$

$$u_{0,j} := ff(x_j)$$

$$u_{10,j} := fl(t)$$

$$i := 1..9$$

$$j := 0$$

$$u_{i,1} := \frac{(u_{i-1,j} + 4 \cdot u_{i,j} + u_{i+1,j})}{6}$$

Матема...
x = ∫ αβ

Графики

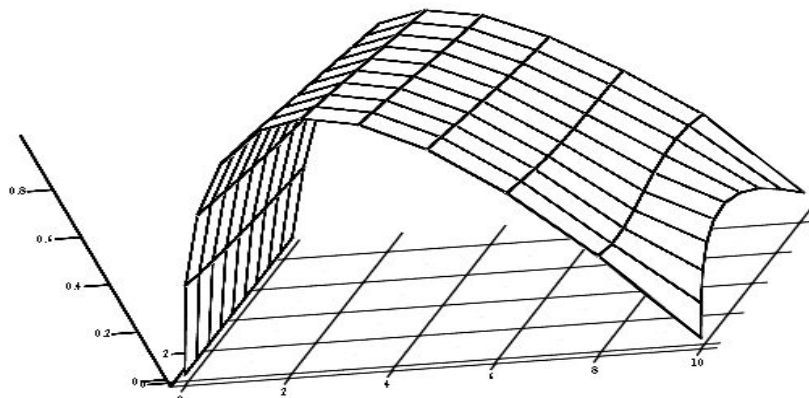
İlkin verilənlərdə dəyişiklik aparıldıqdan sonra bütün hesablar, yəni həllin cədvəli və təqribi integral səthin qurulması yerinə yetiriləcəkdir. Aşağıdakı fragmentdə yeni sərhəd şərtlərinə uyğun həllin cədvəli və integral səthi əks olunmuşdur.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.36	0.347	0.336	0.326	0.317	0.31	0.302	0.296	0.289	0.283
2	0.64	0.627	0.613	0.6	0.588	0.576	0.564	0.553	0.543	0.533
3	0.84	0.827	0.813	0.8	0.787	0.774	0.761	0.748	0.735	0.723
4	0.96	0.947	0.933	0.92	0.907	0.893	0.88	0.867	0.854	0.841
5	1	0.987	0.973	0.96	0.947	0.933	0.92	0.907	0.894	0.881
6	0.96	0.947	0.933	0.92	0.907	0.893	0.88	0.868	0.855	0.843
7	0.84	0.827	0.813	0.8	0.787	0.775	0.764	0.754	0.745	0.736
8	0.64	0.627	0.613	0.603	0.595	0.591	0.588	0.586	0.583	0.579
9	0.36	0.347	0.349	0.361	0.376	0.39	0.4	0.403	0.396	0.38
10	0	0.082	0.155	0.21	0.243	0.249	0.227	0.181	0.114	0.035

u =

Матема...
x = ∫ αβ

Графики



Bu qayda ilə tərtib olunmuş hesabat blokundan istifadə edərək müxtəlif başlanğıc və sərhəd şərtləri daxilində parabolik tip tənliklər həll edilə bilər. Daha ümumi şəkildə parabolik tip tənlik üçün sərhəd məsələsinin həllinə baxaq. Aşağıdakı fraqmentdə ilkin verilənlər (başlanğıc və sərhəd şərtləri də daxil olmaqla), işarələmələr və fərq tənlikləri verilmişdir.

```

parabolik tip tənliyin həlli

verilənlər
f(x) := 4 · x · (1 - x)   h := 0.1   k := 1/3

ff(t) := 0.1 · cos(1.8 · t)   fl1(t) := 0.2 · sin(1.5 · t)

i := 0..10
xi := h · i
ui,0 := f(xi)

j := 0..9
u0,j := ff(j · k)
u10,j := fl1(j · k)

a := 1   b := 0   c := 0   m := 0

a1 := 1 - (a/3) + (c · h2)/6   a2 := (2 · a - b · h)/12   a3 := (-b · h + 2 · a)/12   a4 := (h2 · m · f(xi))/6

a1 = 0.667   a2 = 0.167   a3 = 0.167   a4 = 0

i := 1..9
j := 0
j1 := j + 1

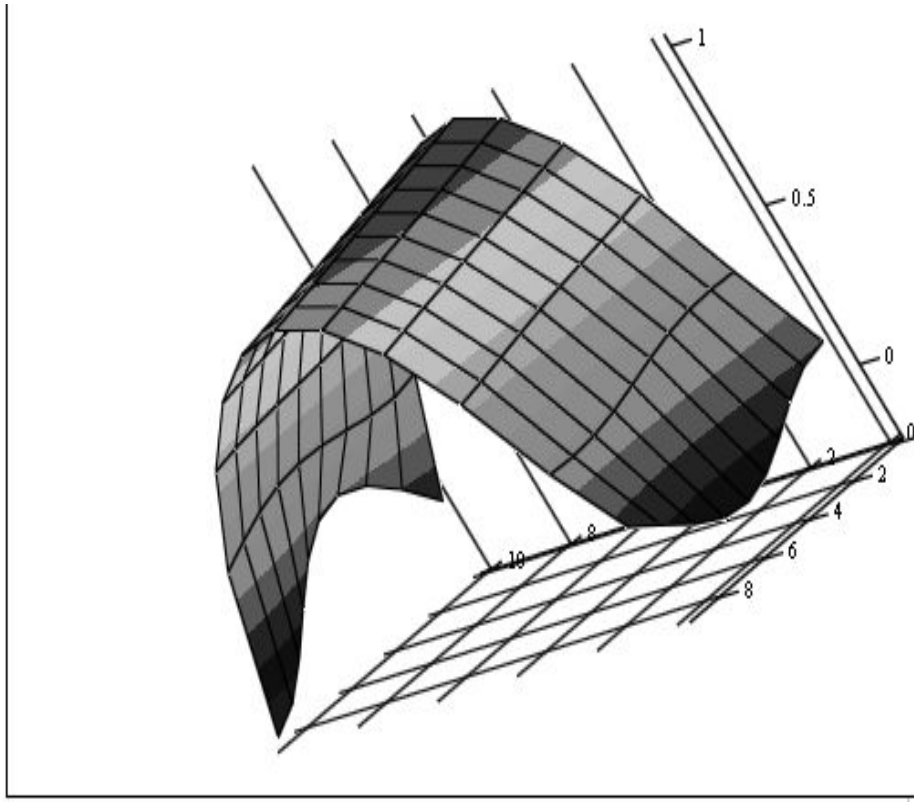
ui,j1 := a1 · ui,j + a2 · ui+1,j + a3 · ui-1,j + a4

```

Aşağıdakı fraqmentdə həllin cədvəli verilmişdir.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.1	0.083	0.036	-0.023	-0.074	-0.099	-0.09	-0.049
1	0.36	0.363	0.36	0.349	0.33	0.307	0.285	0.27
2	0.64	0.627	0.616	0.606	0.596	0.584	0.569	0.554
3	0.84	0.827	0.813	0.8	0.788	0.776	0.763	0.751
4	0.96	0.947	0.933	0.92	0.907	0.894	0.881	0.868
5	1	0.987	0.973	0.96	0.947	0.933	0.92	0.907
6	0.96	0.947	0.933	0.92	0.907	0.893	0.88	0.868
7	0.84	0.827	0.813	0.8	0.787	0.775	0.764	0.754
8	0.64	0.627	0.613	0.603	0.596	0.591	0.587	0.581
9	0.36	0.347	0.352	0.365	0.377	0.381	0.372	0.351
10	0	0.096	0.168	0.199	0.182	0.12	0.028	-0.07

Bu cədvəldən görünür ki, alınmış həll başlanğıc və sərhəd şərtlərini ödəyir. Başlanğıc və sərhəd şərtlərində verilmiş funksiyanın qiymətlərini hesablamaqla nəticələrin doğru olduğunu görürük. Bu nəticələr aşağıdakı fraqmentdə həllin qrafikindən də görünür.



Bu qayda ilə tərtib olunmuş hesabat blokundan istifadə edərək müxtəlif başlanğıc və sərhəd şərtləri daxilində parabolik tip tənliklər həll edilə bilər.

15-ci mövzu

OPTİMALLAŞDIRMANIN ƏDƏDİ ÜSULLARI

Əsas anlayışlar

Optimallaşdırma məsələsində $f(x)$ funksiyasının X çoxluğunda ekstremumlarının tapılmasına baxılır və məsələnin qoyuluşu aşağıdakı kimi yazılır.

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X \subseteq R^n \quad (1)$$

$X = R^n$ olduqda (1) məsələsi şərtsiz optimallaşdırma, $X \subset R^n$ olduqda isə şərti optimallaşdırma məsələsi adlanır. (1)-də $f(x)$ -optimallaşdırma məsələsinin məqsəd funksiyası adlanır. X çoxluğu $f(x)$ funksiyasının minimumunun axtarıldığı nöqtələr çoxluğudur. Bu çoxluğu müəyyən edən şərtlər, (1) məsələsinin məhdudiyətləri adlanır. Bu məhdudiyətlər, tənliklər və bərabərsizliklər sistemi şəklində verilir.

$f(x)$ funksiyasının maksimumunun tapılması məsələsi, $-f(x)$ funksiyasının minimumunun tapılmasına gətirildiyindən

$$\max f(x) = -\min(-f(x))$$

yalnız $f(x)$ funksiyasının minimumunun tapılması məsələsinə baxaq. Funksiyanın lokal və qlobal minimumunun, diferensiallanan funksiyalar üçün x^\bullet nöqtəsinin minimum olmasının zəruri (Ferma teoremi) və kafi şərtləri, minimumun varlığı və yeganəliyi (Veyerştrass) teoremi riyazi analiz kursunda öyrənildiyindən onlar üzərində dayanmayacağıq.

Şərtsiz optimallaşdırma məsələsi

Tutaq ki, $x^\bullet = (x_1^\bullet, x_2^\bullet, \dots, x_n^\bullet)$ nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının minimum nöqtəsidir. Ferma teoreminə görə x^\bullet nöqtəsində

$$\frac{\partial f(x^\bullet)}{\partial x_i} = 0, (i=1,2,\dots,n) \quad (2)$$

şərtləri ödənməlidir. Deməli diferensiallanan $f(x)$ funksiyasının minimumunun tapılması məsələsi (2) tənliklər sisteminin həllinə ($f(x)$ funksiyasının böhran nöqtələrinin tapılması) gətirildi. Əksinə (2) tənliklər sisteminin həlli

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right]^2 \rightarrow \min$$

funksiyasının minimumunun tapılmasına da gətirilə bilər. (2) tənliklər sisteminin dəqiq həllini həmişə tapmaq mümkün olmadığından bu üsul əlverişli deyil və əsasən dəyişənlərin sayı az olduqda, (2)-nin həlli asan olduqda istifadə olunur. Tapılmış həllər çoxluğu içərisindən funksiyanın lokal və qlobal minimumları müəyyən edilir. Kompüterdə funksiyanın şərtsiz ekstremumunun tapılmasında koordinatlarla enmə, qradient və qradientlə ən tez enmə üsullarından istifadə etmək olar.

Koordinatlarla enmə üsulu

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyanın minimumunu tapmaq tələb olunur. Tutaq ki, başlanğıc yaxınlaşma kimi $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ nöqtəsi verilmişdir. $x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ dəyişənlərinin qeyd olunmuş qiymətlərində birdəyişənli $f(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ funksiyanın minimumu tapılır.

$$f(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = \min_{x_1} f(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}),$$

$$f(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \leq f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}).$$

$x_1^{(1)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ dəyişənlərinin qeyd olunmuş qiymətlərində birdəyişənli $f(x_1^{(1)}, x_2, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ funksiyanın minimumu tapılır.

$$f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = \min_{x_2} f(x_1^{(1)}, x_2, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}).$$

Bu prosesi davam etdirsək ,

$$f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_n^{(0)}) \leq f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

şərtini ödəyən $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ nöqtəsini alırıq. $x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$ dəyişənlərinin qeyd olunmuş qiymətlərində birdəyişənli $f(x_1, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ funksiyanın minimumu tapılır.

$$f(x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) = \min_{x_1} f(x_1, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}),$$

$x_1^{(2)}, x_3^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$ dəyişənlərinin qeyd olunmuş qiymətlərində birdəyişənli $f(x_1^{(2)}, x_2, x_3^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ funksiyanın minimumu tapılır.

$$f(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) = \min_{x_2} f(x_1^{(2)}, x_2, x_3^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}).$$

Bu prosesi davam etdirsək ,

$$f(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}) \leq f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$$

şərtini ödəyən $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$ nöqtəsini alırıq.

Bu proses iki ardıcıl $x^{(k)}$ və $x^{(k+1)}$ nöqtələrində $|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})| < \varepsilon$ şərti ödənənə qədər davam etdirilir.

Misal. $f(x, y) = (x-2)^2 + (y-4)^2 + xy$ funksiyasının koordinatlarla enmə üsulu ilə lokal ekstremumunu tapmaq üçün Mathcad sistemində hesabat bloku tərtib edək. Aşağıdakı hesabat blokunda əvvəlcə iki dəyişənli funksiya verilmişdir. Başlanğıc yaxınlaşma kimi $x=2$, $y=2$ götürülmüşdür. $f(x, y)$ funksiyası y dəyişəninə qeyd olunmuş qiymətində $f1(x)$, x dəyişəninə qeyd olunmuş qiymətində isə $f2(y)$ funksiyası ilə işarə olunmuşdur. Minimize standart funksiyasından istifadə edilərək, $f1(x)$, $f2(y)$ funksiyalarının minimumları tapılaraq uyğun olaraq x , y dəyişənlərinə mənimsədilmişdir.

$$f(x, y) := (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + x \cdot y$$

$$\begin{aligned} x &:= 2 & y &:= 2 & a_{0,1} &:= x & a_{1,1} &:= y \\ a_{0,0} &:= x & a_{1,0} &:= y & f2(y) &:= f(x, y) \\ f1(x) &:= f(x, y) & y &:= \text{Minimize}(f2, y) \\ x &:= \text{Minimize}(f1, x) & a_{0,2} &:= x & a_{1,2} &:= y \end{aligned}$$

Hesabat blokunda sıfırıncı, birinci və ikinci yaxınlaşmaların qiymətlərinin a matrisinə mənimsədilməsi göstərilmişdir. Ardıcıl 10 yaxınlaşmanın və $f(x, y)$ funksiyasının qiymətləri aşağıdakı fraqmentdə göstərilmişdir.

		x	y	f(x, y)
$a^T =$		0	1	
	0	2	2	8
	1	1	2	7
	2	1	3.5	4.75
	3	0.25	3.5	4.1875
	4	0.25	3.875	4.046875
	5	0.0625	3.875	4.011719
	6	0.0625	3.96875	4.00293
	7	0.015625	3.96875	4.000732
	8	0.015625	3.992188	4.000183
	9	0.003906	3.992188	4.000046
10	0.003906	3.998047	4.000011	

Nəticələrdən görünür ki, arqumentlərin $x=0.0039$ və $y=3.998$ qiymətlərində $f(x, y)$ funksiyasının 0.0001 dəqiqliklə lokal minimum qiyməti ($\min f(x, y) \approx 4.00001$) götürülə bilər.

Qradyentlə enmə üsulu

Qradyent üsulunu bütün ortimallaşdırma məsələlərinə tətbiq etmək olar. Əgər $f(x)$ funksiyası $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ nöqtəsində diferensiaslanandırsa, bu nöqtədə qradyent vektoru

$$\text{grad}(f(\bar{x})) = \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} \right)$$

düsturu ilə müəyyən olunur. Verilən $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ nöqtəsində $\text{grad}(f(\bar{x}))$ vektoru $f(x) = c = \text{sabit}$ səviyyə xəttinin toxunanına perpendikulyar olub, bu nöqtədə funksiyanın artma istiqamətini göstərir. Qradyent vektoruna əks olan $-\text{grad}(f(\bar{x}))$ vektoru isə antiqradyent vektoru adlanır və funksiyanın azalma istiqamətini göstərir. Funksiyanın minimumunun qradyentlə enmə üsulu ilə tapılmasında iterasiya prosesi

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h * \text{grad}(f(x^{(k)})), (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

düsturu ilə aparılır. Burada h enmə addımı, k isə iterasiyanın nömrəsidir. Ekstremum nöqtəsində funksiyanın qradyenti sıfıra bərabər olur. (3) düsturu ilə iterasiya nəticəsində $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ nöqtələr ardıcılığı alırıq. Alınmış nöqtələrdə funksiyanın qiymətləri

$$f(x^{(0)}) > f(x^{(1)}) > f(x^{(2)}) > \dots > f(x^{(k)})$$

bərabərsizliyini ödəyir $\text{grad}(f(x^{(i)})) \neq 0, (i = 0, 1, 2, \dots, k)$. (3) düsturu sabit h addımı ilə qradyentlə enmə üsulunun düsturu adlanır. Bu düsturda h addımını elə seçirlər ki, $x^{(i)}, (i = 0, 1, 2, \dots, k)$ nöqtələr ardıcılığının hədləri $f(x)$ funksiyasının azalma oblastından kənara çıxmasın. İterasiya prosesi

$$\|\text{grad}(f(x^{(k)}))\| < \varepsilon$$

şərti ödəyəndə qədər davam etdirilir.

Mathcad sistemində qradyentlə enmə üsulu ilə iki dəyişənli funksiyanın minimumunun tapılması üçün hesabat bloku tərtib edilmişdir. Hesabat blokunda əvvəlcə funksiya verilmiş, riyazi simvollar cədvəlinin köməyi ilə xüsusi törəmələr hesablanmış və qradyent vektoru tərtib olunmuşdur. Enmə addımı $h=0.9$, başlanğıc yaxınlaşma

$x_0 = 2, y_0 = 2$ götürülərək (3) düsturuna uyğun iterasiya prosesi qurulmuşdur. Hər bir iterasiyada x və y -in, funksiyanın və qradient vektorunun qiymətləri sütun vektoru şəklində əks olunmuşdur.

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &:= (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + x \cdot y \\
 f_x(x, y) &:= \frac{d}{dx} f(x, y) & f_y(x, y) &:= \frac{d}{dy} f(x, y) \\
 \text{grad}f(x, y) &:= \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} \\
 h &:= 0.9 \\
 x_0 &:= 2 & y_0 &:= 2 \\
 k &:= 1..5 \\
 \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} - h \cdot \text{grad}f(x_{k-1}, y_{k-1}) \\
 k &:= 0..5 \\
 z_k &:= f(x_k, y_k) & \text{grad}f_k &:= \sqrt{[(f_x(x_k, y_k))^2 + (f_y(x_k, y_k))^2]} \\
 x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.2 \\ 0.02 \\ 0.002 \\ 0.0002 \\ 0.00002 \end{pmatrix} & y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3.8 \\ 3.98 \\ 3.998 \\ 3.9998 \\ 3.99998 \end{pmatrix} & z = \begin{pmatrix} 8 \\ 4.04 \\ 4.0004 \\ 4.000004 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} & \text{grad}f = \begin{pmatrix} 2.828427 \\ 0.282843 \\ 0.028284 \\ 0.002828 \\ 0.000283 \\ 0.00002 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Qeyd edək ki, bu hesabat blokunda funksiyanı, enmə addımını dəyişməklə müxtəlif funksiyanın müxtəlif enmə addımları ilə lokal minimumlarını tədqiq etmək olar. h addımı müxtəlif qayda ilə seçilə bilər. $x^{(k+1)}$ nöqtəsində $f(x)$ funksiyanın qiymətini

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)} - h * \text{grad}(f(x^{(k)}))) \quad (4)$$

düsturu ilə hesablaya bilərik. $x^{(k)}$ nöqtəsinin koordinatları məlum olduğundan (4)-ün sağ tərəfi yalnız h -dan asılıdır. h -ı elə seçək ki,

$$f(x^{(k)} - h * \text{grad}(f(x^{(k)}))) \quad (5)$$

funksiyanın qiyməti maksimal azalsın:

$$\min_h f(x^{(k)} - h * \text{grad}(f(x^{(k)}))).$$

Bu münasibətdən tapılmış h -ın qiymətini (3)-də nəzərə alsaq, $f(x)$ funksiyanın minimumunun tapılmasında iterasiyaların sayını azalda bilərik və bu üsul qradientlə ən tez enmə üsulu adlanır. Mathcad sistemində qradientlə ən tez enmə üsulu ilə funksiyanın minimumunun tapılması üçün əvvəlcə h -ın qiyməti müəyyən edilməli, sonra isə (3)

düsturları ilə iterasiyalar qurulmalıdır. Aşağıdakı hesabat blokunda əvvəlcə iki dəyişənli $f(x, y)$ funksiyası verilmiş və onun xüsusi törəmələri hesablanmışdır.

$$f(x, y) := (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + x \cdot y$$

$$f_x(x, y) := \frac{d}{dx} f(x, y) \quad f_y(x, y) := \frac{d}{dy} f(x, y)$$

Daxil edilmiş başlanğıc (x_0, y_0) yaxınlaşması və h addımından asılı olan (5) funksiyası tərtib olunmuşdur (**f21(h)**).

$$x_0 := 2 \quad y_0 := 2$$

$$fh(h) := x_0 - h \cdot f_x(x_0, y_0)$$

$$fh1(h) := y_0 - h \cdot f_y(x_0, y_0)$$

$$f21(h) := f(fh(h), fh1(h))$$

$$f21(h) \rightarrow 4 \cdot h^2 + (-2 + 2 \cdot h)^2 + (2 - 2 \cdot h) \cdot (2 + 2 \cdot h)$$

$$f22(h) := \frac{d}{dh} f21(h)$$

$$h := 0$$

Given

$$f22(h) = 0$$

$$h := \text{Find}(h)$$

f21(h) funksiyasının böhran nöqtələrinin tapmaq üçün hesabat bloku (**Given**) tərtib edilmişdir. **Find** standart funksiyasından istifadə edərək, h addamı seçilmişdir. (3) düsturu ilə iterasiya

$$\text{gradf}(x, y) := \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$

$$x_0 := 2 \quad y_0 := 2$$

$$k := 1..2$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} - h \cdot \text{gradf}(x_{k-1}, y_{k-1})$$

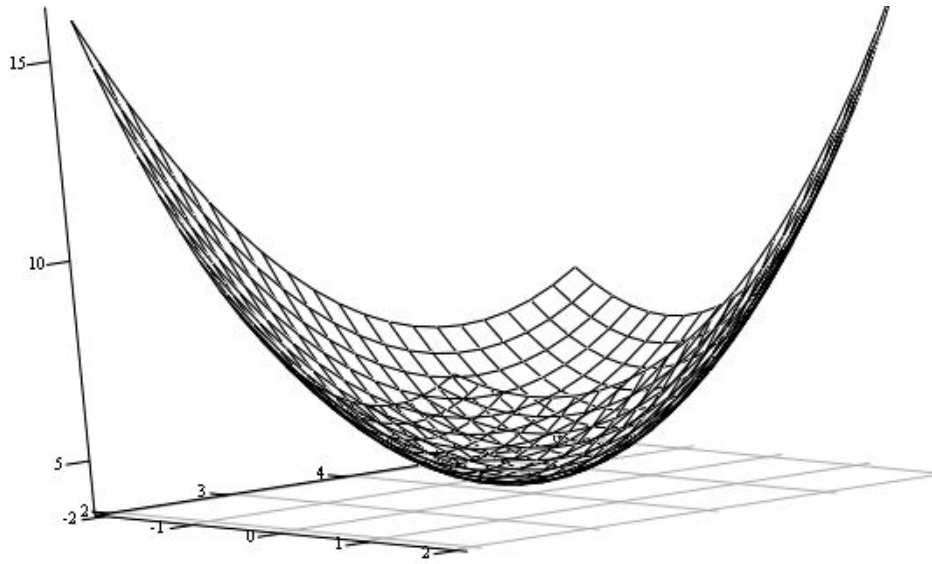
$$k := 0..2$$

$$z_k := f(x_k, y_k) \quad \text{gradf}_k := \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2}$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{gradf} = \begin{pmatrix} 2.828427 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nəticələrindən görünür ki, ikinci iterasiyada funksiyanın qradienti sıfıra bərabər olur. Deməli, verilən funksiya $x=0$, $y=4$ olduqda minimum qiymət alır ($z_{min}=4$). Eyni bir funksiyanın koordinatlarla enmə, qradientlə enmə və qradientlə ən tez enmə üsulları ilə minimumunun tapılmasında alınmış nəticələri müqayisə etsək görərik ki, qradientlə ən tez enmə üsulunda funksiyanın minimum aldığı nöqtələrin koordinatı daha dəqiq olmaqla iterasiyaların sayı azdır. Mathcad sistemində çoxdəyişənli funksiyanın minimumunun tapılması üçün standart funksiya (**Minimize**) tərtib olunmuşdur. Aşağıdakı fraqmentdə üç üsulla minimumu tədqiq edilmiş funksiyanın qrafiki qurulmuş və standard funksiya istifadə edilərək minimumu tapılmışdır.

$$f(x, y) := (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + x \cdot y$$



$$f(x, y) := (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + x \cdot y$$

$$x := 2 \quad y := 2$$

Given

$$a := \text{Minimize}(f, x, y)$$

$$a = \begin{pmatrix} -0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f(-0, 4) = 4$$

Alınmış nəticələrin doğru olduğunu qrafikdə görmək mümkündür.

Qeyd edək ki, baxılan üsullar funksiyanın lokal minimumunu tapmağa imkan verir. Funksiyanın bir neçə lokal minimumu ola bilər. Baxılan üsullarla başlanğıc yaxınlaşmadan asılı olaraq, lokal minimumlardan biri tapılır.

Şərti optimallaşdırma məsələsi

Tutaq ki,

$$X = \left\{ x \in R^n : g_i(x) = b_i, i = \overline{1, k}, g_i(x) \geq b_i, i = \overline{k+1, r}, \right. \\ \left. g_i(x) \leq b_i, i = \overline{r+1, m}, x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \right\} \quad (1)$$

çoxluğunda

$$f(x) \rightarrow \min \quad (2)$$

funksiyasının minimumunun tapılması tələb olunur. Burada $f(x)$ və $g_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$)

funksiyaları R^n -də təyin olunmuş sonlu qiymətlər alan, diferensiallanan funksiyalar n, m, k və r isə natural ədədlərdir. Aşağıdakı xüsusi hala baxaq.

$$g(x_1, x_2) = 0 \quad (3)$$

şərti daxilində

$$f(x_1, x_2) \rightarrow \min$$

funksiyasının minimumunu tapmaq.

Əgər (3) şərtindən x_2 dəyişənini x_1 dəyişəni vasitəsi ilə $x_2 = \varphi(x_1)$ kimi ifadə etmək mümkün olarsa, $f(x_1, x_2)$ funksiyasının şərti minimumunun tapılması əvəzinə $f(x_1, \varphi(x_1))$ birdəyişənli funksiyasının şərtsiz minimumunu tapmaqla məsələsini həll etmək olar.

Mial 1. $z = (x-2)^2 + 3(y-4)^2$ funksiyasının $2x + y = 3$ şərti daxilində minimumunu tapmaq.

$$2x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 2x$$

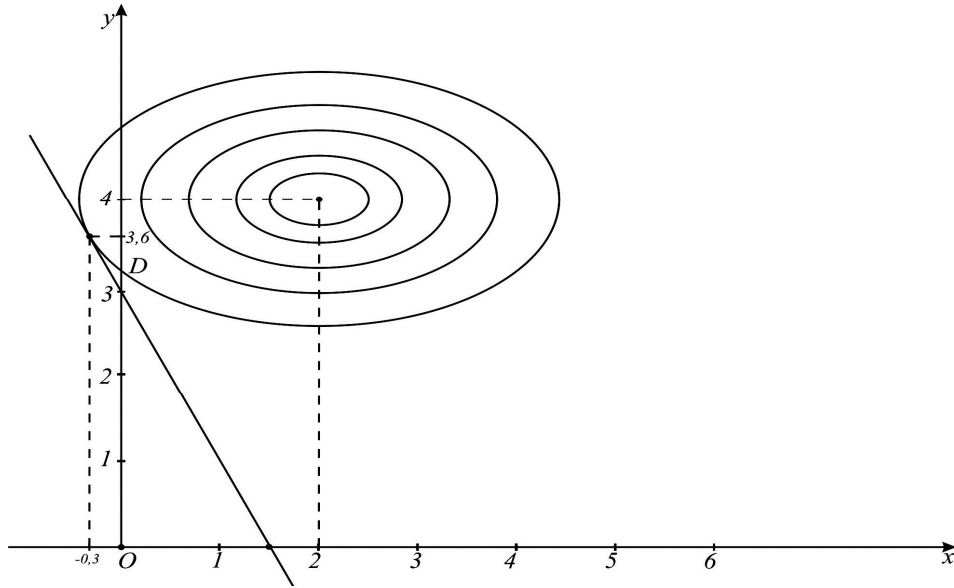
$$z = (x-2)^2 + 3(y-4)^2 = (x-2)^2 + 3(3-2x-4)^2 = 13x^2 + 8x + 7$$

$$z'_x = 26x + 8 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{13}$$

$z''_x = 26 > 0$ olduğundan tapılan böhran nöqtəsində funksiya minimum qiymətini alır.

$$x = -\frac{4}{13}, y = 3 - 2\left(-\frac{4}{13}\right) = \frac{47}{13} \quad z_{\min} = 5\frac{10}{13}$$

Məsələnin həndəsi həllinə baxaq. $z = (x-2)^2 + 3(y-4)^2$ funksiyasını aşağıdakı kimi çevirək.



$$\frac{(x - 2)^2}{a^2} + \frac{(y - 4)^2}{b^2} = 1, a = \sqrt{z}, b = \sqrt{\frac{z}{3}}.$$

Bu tənlik yarım oxları a və b , mərkəzi $(2, 4)$ nöqtəsində olan ellipsdir. Z funksiyasının minimumu axtarıldığından yarım oxları ən kiçik olan elə bir ellips tapmalıyıq ki, onun $2x + y = 3$ düz xətti ilə ortaq nöqtəsi olsun (şəkil 10.1-də A nöqtəsi). Qeyd edək ki, çox vaxt (3) şərtindən x_2 dəyişənini x_1 dəyişəni vasitəsi ilə ifadə etmək, Z funksiyasının qrafikini qurmaq mümkün olmur. Ona görə də məsələnin başqa üsulla həllinə baxaq.

Laqranj vuruqları üsulu

Fərz edək ki, $g(x_1, x_2)$ və $f(x_1, x_2)$ funksiyaları diferensiallanandır.

$$dg(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow g'_{x_1} dx_1 + g'_{x_2} dx_2 = 0 \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g'_{x_1}}{g'_{x_2}} \quad (4)$$

Tutaq ki, (x_1^0, x_2^0) nöqtəsi x_1 və x_2 müstəvisində (3) şərtini ödəyir və $f(x_1, x_2)$ funksiyasının ekstremum nöqtəsidir. Onda bu nöqtədə

$$df(x_1^0, x_2^0) = 0 \Rightarrow f'_{x_1} dx_1 + f'_{x_2} dx_2 = 0 \Rightarrow f'_{x_1} + f'_{x_2} \frac{dx_2}{dx_1} = 0 \quad (5)$$

(4) şərtini (5)-də nəzərə alsaq

$$f'_{x_1} + f'_{x_2} \left(-\frac{g'_{x_1}}{g'_{x_2}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{f'_{x_1}}{g'_{x_1}} = \frac{f'_{x_2}}{g'_{x_2}} \quad (6)$$

olar. (6)-da

$$\frac{f'_{x_1}}{g'_{x_1}} = \frac{f'_{x_2}}{g'_{x_2}} = -\lambda$$

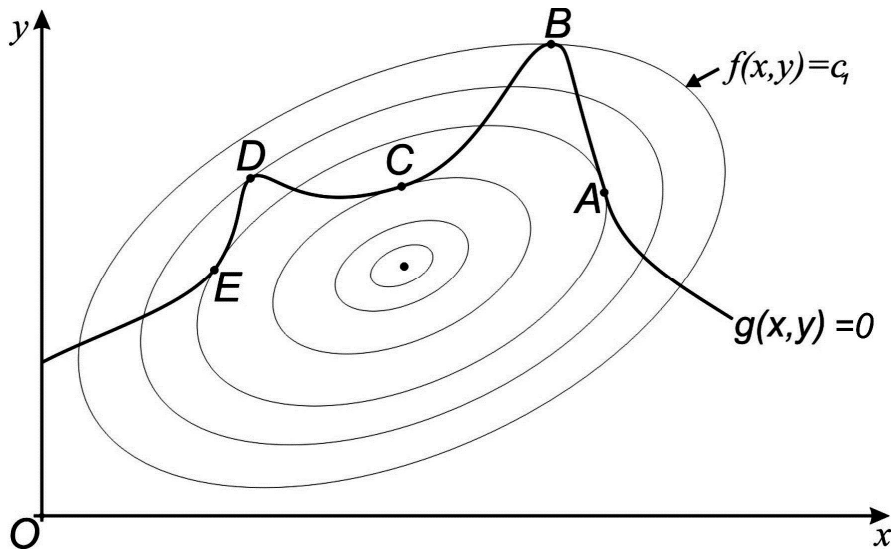
işarələməsini aparsaq,

$$f'_{x_1} + \lambda g'_{x_1} = 0 \quad f'_{x_2} + \lambda g'_{x_2} = 0 \quad (7)$$

münasibətlərini alarıq. Laqranj funksiyasını quraq.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda * g(x_1, x_2) \quad (8)$$

$L(x_1, x_2, \lambda)$ funksiyasının x_1 və x_2 dəyişənlərinə nəzərən xüsusi törəmələri (7) münasibətlərini, λ (Laqranj vuruğu) parametrinə nəzərən xüsusi törəməsi isə $g(x_1, x_2)$ funksiyasını verir. (6) şərtinin həndəsi mənasına baxaq. $x_1 O x_2$ müstəvisində $f(x_1, x_2)$ funksiyasının səviyyə xətlərini və $g(x_1, x_2) = 0$ xətlərini quraq (şəkil 10.2). (6) şərti yalnız A, B, C və D nöqtələrin-də, yəni səviyyə xətləri ilə $g(x_1, x_2) = 0$ əyrisinin ortaq toxunanları olduğu nöqtələrdə ödənilir. Bu nöqtələr $f(x_1, x_2)$ funksiyasının $g(x_1, x_2) = 0$ şərtini ödəyən şərti ekstremum nöqtələridir.



Şəkil 10.2.

Deməli, baxılan şərti ekstremum məsələsi Laqranj funksiyasının (8) şərtsiz ekstremumunun tapılma məsələsinə gətirildi.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = f'_{x_1} + \lambda * g'_{x_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = f'_{x_2} + \lambda * g'_{x_2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

(9) tənliklər sistemini həll edərək A, B, C, D və E nöqtələrinin koordinatları tapılır. Bu nöqtələr içərisindən funksiyanın minimum və maksimumları müəyyən edilir. \$10.5 misal 1-də $g(x, y) = 3 - 2x - y$ qəbul edib, Laqranj funksiyasını tərtib edək:

$$L(x, y, \lambda) = (x-2)^2 + 3(y-4)^2 + \lambda(3-2x-y)$$

(9) tənliklər sistemini tərtib edək.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-2) - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 6(y-4) - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 3 - 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 4 + \frac{1}{6}\lambda \\ 3 - 2(2 + \lambda) - (4 + \frac{1}{6}\lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{13} \\ y = \frac{47}{13} \\ \lambda = -\frac{30}{13} \end{cases},$$

$$z_{\min} = 5\frac{10}{13}.$$

(1)-(2) məsələsində Laqranj funksiyasının tərtibi üçün məhdudiyətlər sistemini aşağıdakı kimi çevirək.

$$\begin{cases} b_i - g_i(x) = 0, i = \overline{1, k} \\ b_i - g_i(x) \leq 0, i = \overline{k+1, r} \\ b_i - g_i(x) \geq 0, i = \overline{r+1, m} \end{cases} \\ x \geq 0$$

Laqranj funksiyasını tərtib edək.

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (b_i - g_i(x)) + \sum_{i=k+1}^r \lambda_i (b_i - g_i(x)) + \sum_{i=r+1}^m \lambda_i (b_i - g_i(x)). \quad (10)$$

$L(x, \lambda)$ Laqranj funksiyasının ekstremum nöqtələrinin varlığı üçün müxtəlif teoremlər vardır. Kun-Takker teoremi daha ümumdür və ekstremum nöqtəsi aşağıdakı

$$1. \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i} \leq 0, x_i^* \geq 0 \text{ olmaqla } x_i^* \left[\frac{\partial L(x_i^*, \lambda_i^*)}{\partial x_i} \right] = 0, (i = \overline{1, n}),$$

$$2. \begin{cases} \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0, i = \overline{1, k}, \\ \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} \geq 0, \lambda_i \geq 0, i = \overline{k+1, r}, \\ \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} \leq 0, \lambda_i \leq 0, i = \overline{r+1, m} \end{cases} \text{ olmaqla } \lambda_i^* \left[\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} \right] = 0, i = \overline{k+1, m}$$

şərtlərini ödəyən x^* və λ^* vektorunun tapılmasına gətirilir. Praktikada $(n+m)$ sayda

$$\begin{cases} x_i \left[\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_i} \right] = 0, (i = \overline{1, n}) \\ \lambda_i \left[\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} \right] = 0, (i = \overline{1, m}) \end{cases} \quad (11)$$

tənliklər sistemini həll edərək x^* və λ^* vektorları tapılır. Kun-Takker teoreminin 1 və 2 şərtlərini ödəyən x^* , λ^* həlləri içərisindən klassik analizin üsulları ilə funksiyanın lokal minimumları (maksimumları) müəyyən edilir.

$f(x)$ və $g_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) funksiyalarının üzərinə əlavə şərtlər qoyulduqda (qabarıqlıq və ya çöklüklük) (1)-(2) məsələsinin həlli Laqranj funksiyasının yəhərvəri nöqtəsinin tapılmasına gətirilir. Ümumiyyətlə qeyri-xətti optimallaşdırma məsələlərində məqsəd funksiyası və məhdudiyyətləri müəyyən edən funksiyalar qabarıq olmaya da bilər. Məqsəd funksiyasının sər-həd nöqtələri ilə yanaşı, həllin axtarıldığı oblastın daxili nöqtələrində də bir neçə lokal ekstremumu ola bilər. Ona görə də qeyri-xətti optimallaşdırma məsələlərinin həlli üçün ümumi üsul yoxdur və mövcud üsullar məsələnin tam həlli üçün dəqiq hesablama alqoritmi vermir.

Misal 1. $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + x_2^2$ funksiyasının

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \end{cases} \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

şərtləri daxilində minimumunu taraq. Məqsəd funksiyası mərkəzi (3,0) nöqtəsində radiusu \sqrt{f} -ə bərabər olan çevrəni xarakterizə edir. Laqranj funksiyasını tərtib edək.

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = (x_1 - 3)^2 + x_2^2 + \lambda_1(12 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(x_1 + x_2 - 6)$$

(11) tənliklər sistemini tərtib edək.

$$\begin{cases} x_1(2x_1 - 6 - \lambda_1 - \lambda_2) = 0 \\ x_2(2x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \\ \lambda_1(12 - x_1 - 2x_2) = 0 \\ \lambda_2(x_1 + x_2 - 6) = 0 \end{cases}$$

Alınmış qeyri-xətti tənliklər sisteminin

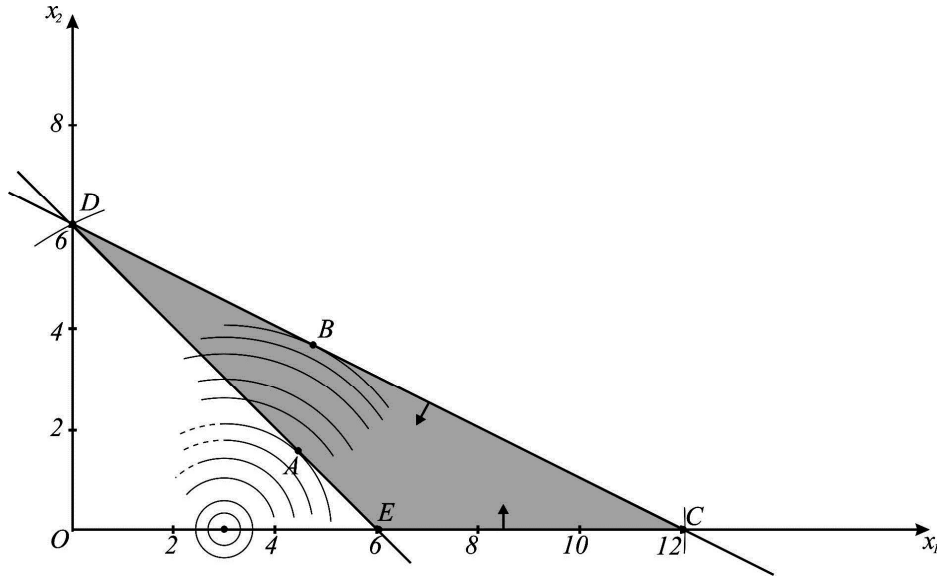
1. $x_1 = 4.5, x_2 = 1.5, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$
2. $x_1 = 4.8, x_2 = 3.6, \lambda_1 = 3.6, \lambda_2 = 0$

həlləri funksiyanın şərti lokal minimum nöqtələridir.

$$f(4.5, 1.5) = (4.5 - 3)^2 + 1.5^2 = 4.5$$

$$f(4.8,3.6) = (4.8-3)^2 + 3.6^2 = 16.2$$

Lokal minimum nöqtələri şəkil 10.3-də göstərilmişdir (A və B nöqtələri). Optimallaşdırma məsələlərində məhdudiyyətlər ilə müəyyən olunan oblastın təpə nöqtələrində də (C,D,E) funksiyanın qiymətləri nəzərə alınmaqla qlobal şərti minimum müəyyən edilməlidir. Baxılan məsələdə funksiyanın qlobal şərti minimumu 4.5-ə bərabərdir və bu qiyməti funksiya $A(4.5,1.5)$ nöqtəsində alır.



Şəkil 10.3

Mathcad sistemində funksiyanın şərti ekstremumunun tapılması üçün hesabat bloku tərtib olunmalıdır. Hesabat blokunun əvvəlində dəyişənlərin başlanğıc qiyməti, məqsəd funksiyası, hesabat blokunun başlanğıcını bildiren **given** açar, sözü məsələnin məhdudiyyətləri və qlobal şərti minimumun tapılması üçün **Minimize** standart funksiyası ardıcılıqla yazılmalıdır. Laqranj vuruqları üsulu ilə həll olunmuş misalın Mathcad sistemində həllinin hesabat bloku aşağıda verilmişdir.

$$\begin{aligned}
 &x1 := 8 \quad x2 := 2 \\
 &f(x1, x2) := (x1 - 3)^2 + (x2)^2 \\
 &\text{given} \\
 &x1 + 2x2 \leq 12 \\
 &x1 + x2 \geq 6 \\
 &x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0 \\
 &\text{Minimize}(f, x1, x2) = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} \\
 &f(4.5, 1.5) = 4.5
 \end{aligned}$$

$f(x)$ və $g_i(x)$ ($i=1,2,\dots,m$) funksiyaları x_i ($i=1,\dots,n$) dəyişənlərinə nəzərən xətti olduqda (1)-(2) məsələsi xətti proqramlaşdırma məsələsi adlanır. Qeyri-xətti proqram-

laşdırma məsələlərindən fərqli olaraq, xətti proqramlaşdırma məsələsi dəqiq həll alqoritminə malikdir.

İstifadə olunan ədəbiyyat

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений (I, II том), Москва 1972
2. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. Москва 1990
3. Галушкин А.И., Дегтярев Ю.И. и другие. Основы кибернетики. Москва 1974
4. Qurbanova R.V., Aslanova N.Ş. Mathcad sisteminin əsas üstünlükləri. İnformasiya-kommunikasiya texnologiyaları və elektron təhsilin aktual problemləri. Gəncə 2007
5. Cuvarlinskaya E.R., Əliyeva M.T. Kompüter riyaziyyatı sistemlərinin müqayisəli təhlili və tətbiqləri.
6. Данилина Н.И. и другие. Численные методы. Москва 1976
7. Демидович Б.П. Марон И.А. Основы вычислительной математики, Москва 1960
8. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Москва 1962
9. Дьяконов В.П. Компьютерная математика, *теория и практика*. Москва 2001
10. Дьяченко В.Ф. Основные понятия вычислительной математики. Москва 1972
11. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Киев 1972
12. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. Москва 1967
13. İsgəndərov A.D., Tağıyev R.Q., Yaqubov Q.Y. Optimallaşdırma üsulları. Bakı 1994
14. İsmayılov Ə., Əliyev M. və başqaları. Hesablama metodları və EHM-in tətbiqi. Bakı 1991
15. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. Москва 1975
16. Кирьянов Дмитрий. Mathcad 13. Санкт-Петербург 2006
17. Копчанов Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. Москва 1972

18. Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию. Минск 1978
19. Əliyev A.Y., Piriverdiyev V.Ə. Diferensial və inteqral tənliklərin təqribi hesablamə üsulları. Bakı 1993
20. Məmmədov F.H., Aslanov Ə.Ə., Nəsirova Ş.S. Mathcad sistemində funksiyanın Furye sırasına ayrılışının təşkili. GDU Elmi xəbərlər. Gəncə 2009
21. Məmmədov F.H., Bayramova N.Q. Kompüter riyaziyyatı sistemlərində bəzi proseslərin tədqiqi imkanları. İnformasiya-kommunikasiya texnologiyaları və elektron təhsilin aktual problemləri. Gəncə 2007
22. Məmmədov F.H., Məmmədov İ.Y. Mathcad mühitində xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həllinin təşkili. GDU Elmi xəbərlər. Gəncə 2009
23. Məmmədov F.H., Məmmədov T.B., Məsimova S.N. Adi diferensial tənliklər və mühəndis məsələlərinin riyazi modelləri. Bakı 1998
24. Məmmədov F.H., İbadov N.V. Xətti proqramlaşdırma məsələsində bəzi halların tətbiqi. GDU Elmi xəbərlər. Gəncə 2009
25. Məmmədov F.H., Cəfərova B.L. Aproximasiya məsələsində asılılığın formasının əsaslandırılması. GDU Elmi xəbərlər. Gəncə 2006
26. Məmmədov F.H., Hacıyev T.M. Parametrik proqramlaşdırma məsələsində bəzi halların tədqiqi. AMEA. Konfrans materialları. Bakı 2010
27. Məmmədov F.H., Hüseynov M.Ə., Məmmədov T.B. Fərdi EHM və riyazi modellərin mühəndis məsələlərinin həllinə tətbiqi. Gəncə 1993
28. Məmmədov Y.S. Təqribi hesablamə üsulları. Bakı 1986
29. Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений. Москва 1962
30. Nəsirova Ş.S. Bəzi proseslərin kompüterdə modelinin qurulmasının əsas üstünlükləri. İnformasiya-kommunikasiya texnologiyaları və elektron təhsilin aktual problemləri. Gəncə 2007
31. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. Москва 1965
32. Поляк Б.Т. Введение в оптимизации. Москва 1983
33. Устинов С.М., Зимницкий В.А. Вычислительная математика. Санкт-Петербург 2008

MÜNDƏRİCAT

ÖN SÖZ	3
GİRİŞ	5
I FƏSİL	
Kompüter riyaziyyatı sistemlərinin strukturu	9
1.1. Kompüter riyaziyyatı sistemlərinin müqayisəli təhlili	10
1.2. Mathcad sistemində funksiyanın verilməsi və qrafikin qurulması qaydası.....	11
1.3. Mathcad sistemində funksiyanın törəməsinin hesablanması	15
1.4. Cəmlərin və hasillərin hesablanması.....	17
1.5. Limitlərin hesablanması.....	18
1.6. Qeyri-müəyyən və müəyyən inteqralların hesablanması.....	19
1.7. Mathcad sistemində matrislərin verilməsi.....	20
II FƏSİL	
Təqribi ədədlər. Xəta anlayışı	23
2.1. Mütləq və nisbi xəta.....	23
2.2. Xətalər nəzəriyyəsinin əsas məsələsi	28
III FƏSİL	
Birdəyişənli qeyri-xətti tənliklər	31
3.1. Tənliyin köklərinin ayrılması	32
3.2. Qeyri-xətti tənliklərinin köklərinin dəqiqləşdirilməsi üsulları.....	39
3.2.1. Parçanın yarıya bölünməsi üsulu.....	39
3.2.2. Vətərlər (kəsənlər) üsulu	43
3.2.3. Toxunanlar (Nyuton) üsulu	47
3.2.4. Vətərlər və toxunanlar üsullarının kombinasiyası	52
3.2.5. İterasiya üsulu	54
3.2.6. Sıxan unikas	57
3.2.7. İterasiya üsulunun yığılması	58
3.2.8. İterasiya üsulundan istifadənin ümumi sxemi	59
IV FƏSİL	
Xətti tənliklər sisteminin təqribi üsullarla həlli	63
4.1. Əsas anlayışlar	63
4.2. İterasiya (ardıcıl yaxınlaşma) üsulu	65
4.3. Zeydel üsulu	69
4.4. Qeyri-xətti tənliklər sisteminin təqribi üsullarla həlli	71
4.4.1. İterasiya üsulu	71
4.4.2. Nyuton üsulu	76

V FƏSİL

İnterpolyasiya məsələsi	79
5.1. Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisi	82
5.2. Bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən düyün nöqtələri üçün Laqranjın inlterpolyasiya çoxhədlisi	84
5.3. Eytkenin interpolyasiya sxemi	85
5.4. Laqranjın interpolyasiya düsturunun xətası	86
5.5. Xətanın minimum olması üçün düyün nöqtələrin seçilməsi.....	89
5.6. Sonlu fərqlər.....	90
5.7. Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisi	92
5.8. Nyutonun ikinci interpolyasiya çoxhədlisi	96
5.9. Ayrılan (bölünən) fərqlər	99
5.10. Düyün nöqtələri bərabər məsafədə yerləşməyən halda Nyutonun interpolyasiya düsturu.....	100
5.11. Tərsinə interpolyasiya.....	102
5.12. Aproximasiya məsələsinin qoyuluşu.....	102

VI FƏSİL

Ədədi inteqrallama və diferensiallama	108
6.1. Nyuton – Kotes düsturu	109
6.2. Düzbucaqlılar düsturu	110
6.3. Trapeslər düsturu	113
6.4. Simpson düsturu	116
6.5. Ədədi diferensiallama.....	119
6.6. Qrafik şəkildə verilmiş funksiyanın diferensiallanması.....	121

VII FƏSİL

Adi diferensial tənliklərin təqribi üsullarla həlli	123
7.1. Əsas anlayışlar.....	123
7.2. Ardıcıl yaxınlaşma(Pikar) üsulu.....	124
7.3. Eylər üsulu	127
7.4. Runqe-Kutt üsulu.....	131
7.5. Adi diferensial tənlikləri üçün sərhəd məsələsi	137
7.5.1. Xətti sərhəd məsələsi	138
7.5.2. İkitərtibli xətti diferensial tənlik üçün ikinöqtəli xətti sərhəd məsələsi.	139
7.5.3. Sonlu fərqlər üsulu	140
7.5.4. Qovma üsulu	143

VIII FƏSİL

İki tərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliklər	146
8.1. Əsas anlayışlar	146
8.2. Elliptik tip tənlik üçün sərhəd şərtləri	148
8.3. Laplas tənliyinin sonlu fərqlərlə yazılışı	149
8.4. Dirixlə məsələsinin şəbəkə üsulu ilə həlli	152
8.5. Mathcad sistemində Dirixlə məsələsinin həlli	154
8.6. Hiperbolik tip tənlik üçün başlanğıc və sərhəd şərtləri.....	157
8.7. Hiperbolik tip tənliyin həlli üçün fərq tənliklərin tərtib olunması.....	158
8.8. Mathcad sistemində hiperbolik tip tənliyin həlli	160

8.9. Parabolik tip tənlik üçün fərq tənliklərinin tərtibi.....	165
8.10. Mathcad sistemində parabolik tip tənlik üçün sərhəd məsələsinin həlli.....	169

IX FƏSİL

İntegral tənliklərin təqribi üsullarla həlli	174
9.1. Əsas anlayışlar	174
9.2. İterasiya üsulu	175
9.3. Xətti integral tənlik ilə xətti cəbri tənlik arasında əlaqə.....	176

X FƏSİL

Optimallaşdırmanın ədədisulları	181
10.1. Əsas anlayışları	181
10.2. Şərtsiz optimallaşdırma məsələsi	181
10.3. Koordinatlarla enmə üsulu	182
10.4. Qradientlə enmə üsulu	184
10.5. Şərti optimallaşdırma məsələsi	188
10.6. Laqranjun vuruqlar üsulu	189
10.7. Xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu və həll alqoritmi	194
10.8. Mathcad sistemində xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlli	196
10.9. Kəsr xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu və Mathcad sistemində həlli	197
İstifadə olunmuş ədəbiyyat	201